Seconda prova in itinere — 19 dicembre 2001

1. Calcolare
$$\int_\gamma (y\,dx - xy\,dy)$$
dove γ è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, contenuta nel semipiano superiore e percorsa in senso *orario*.

2. Nel piano (x, y) si consideri la forma differenziale
$$\omega = 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy.$$

a) Dimostrare che la forma è esatta in tutto $\mathbb{R}^2$.

b) Calcolare una primitiva di ω.

3. Per ciascuno dei seguenti insiemi di $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ dire se è stellato.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^3\}$,
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1 - 3|x|\}$,
- $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ e } z^2 \geq x^2 + y^2\}$.

4. Dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2}\,dx = 0.$$

5. Dire se il seguente integrale improprio è convergente o divergente.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x \ln x}{(\cosh x)^2 |1 - x|^{3/2}}\,dx$$