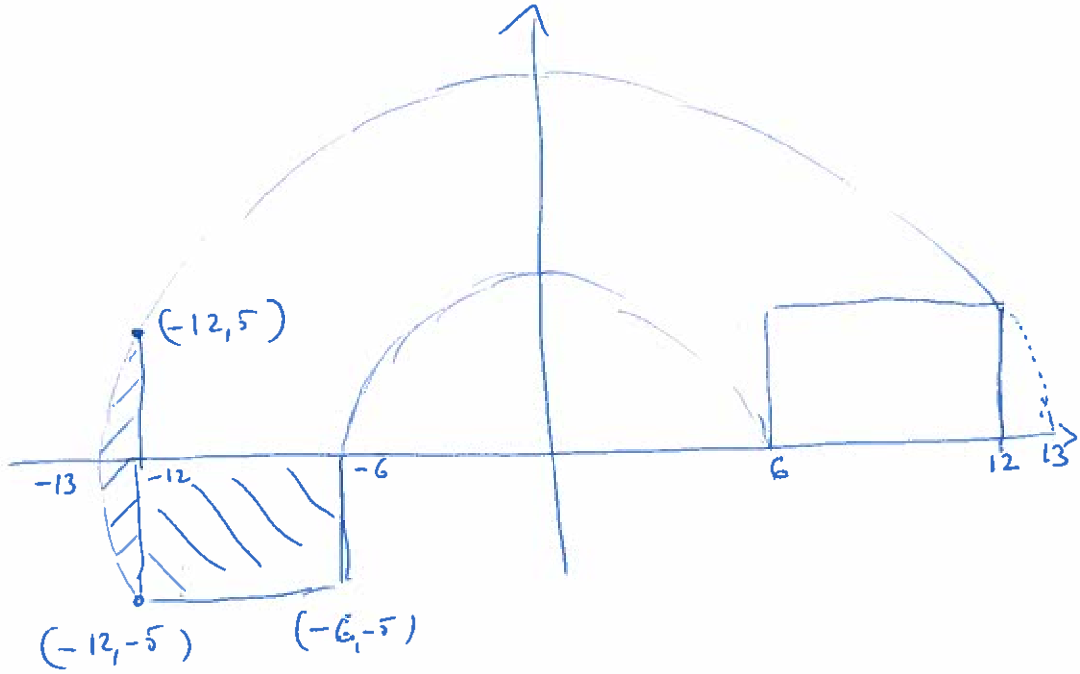
1)



. Per evidenti ragioni geometriche, si ha che

$$\text{Area}(A) = 6\cdot 5 + \frac{\pi}{2}13^2 - \frac{\pi}{2}\cdot 6^2 = 30 + \frac{133}{2}\pi$$

. Posto $A_1 =$  e $A_2 =$  per ragioni di simmetria, si ha che $\iint_A x = \iint_{A_1} x + \iint_{A_2} x$. Ora,

$$\iint_{A_1} x\,dx\,dy = \int_{-5}^{5} dy \int_{-\sqrt{169-y^2}}^{-12} x\,dx = \int_{-5}^{5} dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{\ }}^{-12}$$

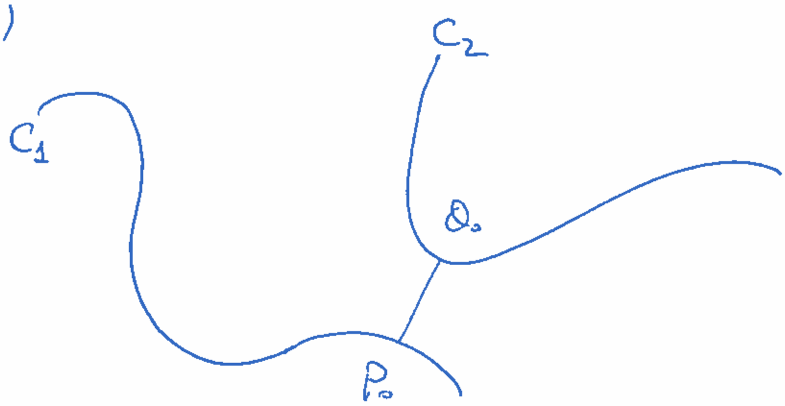
$$= \int_{-5}^{5} dy \left(\frac{144}{2} - \frac{169-y^2}{2}\right) = \int_{-5}^{5} \frac{y^2-25}{2}\,dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{25}{2}y\right]_{-5}^{5}$$

$$= \frac{125}{6} - \frac{125}{2} + \frac{125}{6} - \frac{125}{2} = \frac{125}{3} - 125 = -\frac{250}{3}$$

$$\iint_{A_2} x\,dx\,dy = \int_{-5}^{0} dy \int_{-12}^{-6} x\,dx = 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-12}^{-6} = 5\cdot\left[18 - 72\right] = -270$$

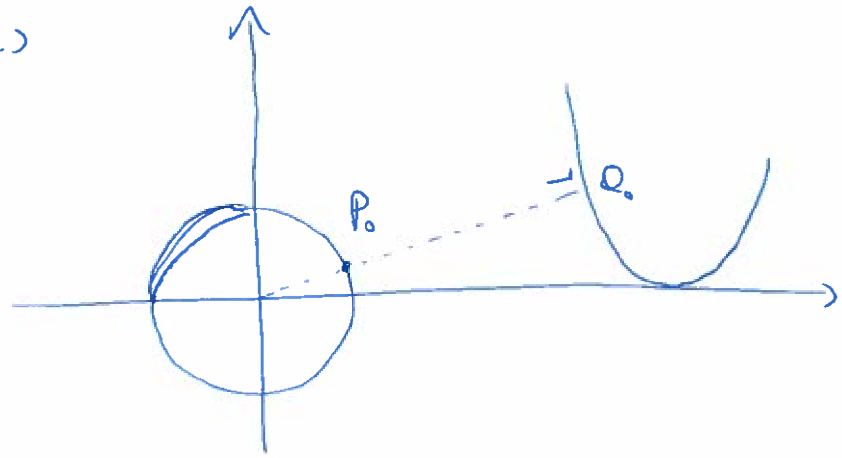
2] (a) Si ponga $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da
$F(P,Q) = |P-Q|^2$ (oppure $|P-Q|$ va anche bene)
F è continua. Poiché $C_1 \times C_2$ è compatto, $F_{|C_1 \times C_2}$
ha minimo per il teor. di Weierstrass.

(b)



Si fissi P_0 e si parametrizzi C_2 tramite una $\gamma(t)$
ove $\gamma(t_0) = Q_0$ per un certo tempo t_0. Posto $F(P,Q) = |P-Q|^2$
come sopra, ho allora che $\varphi(t) := F(P_0, \gamma(t))$ ha un
minimo per $t = t_0$. Segue $0 = \varphi'(t_0) = -2(P_0 - \gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$
$= 2(P_0 - Q_0) \cdot \gamma'(t_0)$, dove ho usato il fatto che
$\nabla_Q (|P-Q|^2) = -2(P-Q)$.

(c)



Per (b) mi basta determinare λ tale che la retta $y = \lambda x$ sia ortogonale alla parabola nel punto Q_0 (altrimenti l'intersezione della retta stessa con la parabola è superflua all'azione più a sinistra).

Ho che Q_0 è dato da $\begin{cases} y = \lambda x \\ y = \frac{1}{2}(x-6)^2 = f(x) \end{cases}$

ove $f'(x) = x - 6$. Devo dunque richiedere che in x_0, ascissa del punto di intersezione, sia $\lambda = \frac{1}{6 - x_0}$

Segue, eliminando λ, $\frac{1}{2}(x_0 - 6)^2 = \frac{x_0}{6 - x_0}$

da cui $(x_0 - 6)^3 + 2x_0 = 0$, $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $\lambda = \frac{1}{2}$

P_0 si trova ponendo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \qquad y^2 = \frac{1}{5}$
(u_0, v_0)

$u_0 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $v_0 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$d^2(C_1, C_2) = \left(4 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$= 16 + \frac{4}{5} - \frac{16\sqrt{5}}{5} + 4 + \frac{1}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 21 - \frac{20\sqrt{5}}{5} = 21 - 4\sqrt{5}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{21 - 4\sqrt{5}}$$