# ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI A.M. 1

Scritto del 15 febbraio 2023

**Esercizio 1.** Si ponga, in $\mathbb{R}^2$, $R = [6,12] \times [0,5]$. Sia

$$A = \bigcup_{\theta \in [0,\pi]} R_\theta,$$

dove $R_\theta$ è il rettangolo ottenuto ruotando $R$ di un angolo $\theta$ (in senso antiorario) attorno all'origine. Per visualizzare $A$ si possono utilizzare per esempio i numeri complessi. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{\theta \in [0,\pi], (x,y) \in R} \{e^{i\theta}(x+iy)\} \\ &= \big\{(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) : \ (x,y) \in R, \ \theta \in [0,\pi]\big\}. \end{aligned}$$

Calcolare l'area di $A$ e l'integrale

$$\iint_A x \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y.$$

**Esercizio 2.** Siano $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ due curve semplici (ovvero tali che $\gamma_i$ sia iniettiva su $(0,1)$ per $i = 1,2$) di classe $C^1$ e siano rispettivamente $C_1$ e $C_2$ i loro sostegni, che supponiamo siano disgiunti.

$(a)$ Dimostrare che esiste almeno una coppia di punti $P_0 \in C_1$, $Q_0 \in C_2$, che minimizzano la distanza tra i sostegni delle due curve, ovvero verificano $|P_0 - Q_0| \leq |P - Q|$ per ogni $P \in C_1$ e per ogni $Q \in C_2$.

$(b)$ Dimostrare che il segmento che unisce tali punti $P_0$ e $Q_0$ è ortogonale sia a $C_1$ che a $C_2$ (ciò vale a dire che è ortogonale ai vettori tangenti alle due curve in $P_0$ e in $Q_0$ rispettivamente).

$(c)$ Determinare il minimo della distanza tra la circonferenza unitaria $C_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ e la parabola $C_2 = \{y = \frac{1}{2}(x-6)^2\}$.