ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI A.M. 1

Scritto del 26 luglio 2022

Esercizio 1. Si consideri la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Per ogni t sia S_t il segmento chiuso che congiunge il punto $\gamma(t)$ all'origine e sia $S := \cup_{t\in[0,2\pi]} S_t$. Osservato che S costituisce una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, determinare l'area di S. Data, inoltre, la forma differenziale

$$\omega = e^{yz}\big(\,\mathrm{d}x + (xz + z^2)\,\mathrm{d}y + (1 + xy + yz)\,\mathrm{d}z\big),$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

Esercizio 2. Si ricordi che una funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana quando esiste una costante $L > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in [-1, 1]$. Si consideri dunque lo spazio $X = \mathrm{Lip}([-1, 1])$ costituito dalle funzioni Lipschitziane su $[-1, 1]$ a valori in $\mathbb{R}$. Osservato che X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, lo si doti della norma

$$\|f\|_X := |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \,:\; x, y \in [-1, 1],\; x \neq y\right\}.$$

Dimostrare innanzitutto che $\|\cdot\|_X$ è effettivamente una norma. Dimostrare quindi che esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)| =: \|f\|_\infty \leq C\|f\|_X \quad \text{per ogni } \; f \in X.$$

Dire quindi se vale anche la disuguaglianza inversa, ovvero se esiste una costante $C' > 0$ tale che

$$\|f\|_X \leq C'\|f\|_\infty \quad \text{per ogni } \; f \in X.$$

Infine, dimostrare che X è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_X$.

Facoltativo (e riservato agli studenti di Matematica): Dimostrare che lo spazio $Y = C^1([-1, 1])$, dotato anch'esso della norma $\|\cdot\|_X$, risulta essere un sottospazio **chiuso** di X, ciò vale a dire che, se una successione di funzioni $\{f_n\} \subset Y$ converge a un limite f nella norma $\|\cdot\|_X$, allora anche f appartiene a Y (ovvero f è derivabile con derivata continua).