SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA
ANALISI MATEMATICA 2 - COMPLEMENTI A.M. 1

Svolgimento prescritto

Lo svolgimento è fatto solamente per la prima fila del prescritto.

Esercizio 1. Ponendo $u = y^{(5)}$ si ottiene un'equazione differenziale del primo ordine lineare che si può risolvere usando la formula risolutiva. Quindi si trova che

$$u(t) = 1$$

avendo anche osservato che $y^{(5)}(0) = u(0) = 1$. A questo punto si osserva che $y^{(5)} = 1$, integrando ripetutamente i membri e imponendo le condizioni iniziali indicate si trova che

$$y(t) = \frac{1}{120}t^5,$$

dunque

$$\frac{1}{5y(1)} = \frac{120}{5} = 24.$$

Esercizio 2. Perchè le due superfici siano tangenti è sufficiente controllare che nel punto $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ i vettori normali siano paralleli. Il punto $(u, v) = (1, 1)$ ha immagine $(2, 1, 2)$ tramite α. Nel punto $(2, 1, 2)$, il vettore ortogonale alla prima superficie è $N_S = (-6, -4, 6)$, mentre quello ortogonale alla seconda superficie è $N_T = \frac{1}{6}(\lambda, 4, -6)$. I due vettori sono paralleli solamente quando $\lambda = 6$.

Esercizio 3. Calcoliamo la jacobiana della funzione F:

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 4e^{4y} \\ e^x & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vuole applicare il teorema del differenziale della funzione composta, per il quale vale

$$JG(0, 0) = JF(F(F(0, 0))) \cdot JF(F(0, 0)) \cdot JF(0, 0).$$

Dal momento che $F(0, 0) = (0, 0)$, allora $JG(0, 0) = (JF(0, 0))^3$. Quindi

$$\det JG(0, 0) = (\det F(0, 0))^3 = (-4)^3 = -64.$$

Esercizio 4. Parametrizziamo l'arco di parabola con $\boldsymbol{r}(t) = (t, 1 - t^2)$, la cui derivata è $\boldsymbol{r}'(t) = (1, -2t)$ e $\|\boldsymbol{r}'(t)\| =\sqrt{1 + 4t^2}$. Quindi l'integrale di linea è

$$\int_0^1 24t\sqrt{1 + 4t^2}dt = 2(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 10\sqrt{5} - 2.$$

Esercizio 5. Per ogni n fissato, bisogna calcolare l'integrale

$$\int_{-n}^{n}\int_{0}^{\frac{1}{4+x^2}} \frac{12}{\pi} + y\arctan(x^3)dydx = \int_{-n}^{n} \frac{12}{\pi}\frac{1}{4+x^2} + \frac{1}{2(4+x^2)}\arctan(x^3)\mathrm{d}x.$$

Osservando l'integranda si vede che il secondo termine è il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari, quindi una funzione dispari, l'intervallo di integrazione è simmetrico quindi il secondo termine non contribuisce all'integrale. L'altro termine invece è una funzione pari, quindi l'integrale si può ridurre all'intervallo $[0, n]$

$$\frac{24}{\pi}\int_0^n \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})}\mathrm{d}x = \frac{12}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^n = \frac{12}{\pi}\arctan(n/2) \to 6.$$

Svolgimento scritto

Esercizio 1. La curva S è descritta dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$$

una cui parametrizzazione è data da

$$r(t) = (2\cos(t) + 1, 2\sin(t) + 1, 6 + 4\cos(t) + 4\sin(t)).$$

Utilizzando i moltiplicatori di lagrange si trova il seguente sistema non lineare

$$x + \lambda(2y - 2) = 0,$$
$$y + \lambda(2x - 2) = 0, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Sottraendo la prima alla seconda si trova la relazione

$$(y - x)(1 - 2\lambda) = 0$$

quindi se $y = x$ si trova che $x = y = 1 \pm \sqrt{2}$. Se invece $\lambda = \frac{1}{2}$ allora $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ e $y = 1 - x$. Quindi, il massimo è $3 + 2\sqrt{2}$, mentre il minimo è $-3/2$.

L'integrale della forma differenziale $x\mathrm{d}z$ sulla curva è dato da

$$\int_0^{2\pi} (2\cos(t) + 1)(4\cos(t) - 4\sin(t))\mathrm{d}t = 8\pi$$

Esercizio 2. Per verificare la continuità si studia il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,\overline{y})} \frac{x^2}{\ln(|x|)(x^2 + y^2)}. \tag{1}$$

Passando in coordinate polari, cerchiamo una maggiorante infinitesima radiale.

$$\left|\frac{x^2}{\ln(|x|)(x^2+\overline{y}^2)}\right| \leq \left|\frac{1}{\ln(\rho\cos(\theta))}\right| = -\frac{1}{\ln(\rho\cos(\theta))}$$

dal momento che $\rho\cos(\theta) < \rho$ si ha che

$$-\frac{1}{\ln(\rho\cos(\theta))} \leq -\frac{1}{\ln(\rho)},$$

l'ultimo termine, indipendente dall'angolo θ, tende a 0 quando ρ tende a 0, quindi la funzione è continua. Verifichiamo la derivabilità. Nell' origine la funzione non è derivabile, infatti

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3\ln(|x|)} = -\infty,$$
$$\partial_y f(0,0) = 0.$$

Invece per i punti $(0,\overline{y})$ con $\overline{y} \neq 0$, si ha che per $x \to 0$

$$\frac{x^2}{\ln(|x|)(x^2+\overline{y}^2)x} = \frac{x}{x^2\ln(|x|)+\overline{y}^2\ln(|x|)} \sim \frac{x}{\overline{y}^2\ln(|x|)} \to 0,$$

quindi la derivata parziale rispetto ad x vale 0 per $x \neq 0$ e chiaramente la derivata parziale rispetto a y vale 0. Per vedere che la funzione è differenziabile si osserva che

$$\left|\frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\ln(\rho\cos(\theta))(\rho^2\cos^2(\theta)+(\rho\sin(\theta)+\overline{y})^2)\rho}\right| \leq -\frac{\rho}{\ln(\rho)(\rho^2+\rho^2+\overline{y}^2+2\rho\overline{y}^2)}$$

e per $\rho \to 0$

$$-\frac{\rho}{\ln(\rho)(\rho^2+\rho^2+\overline{y}^2+2\rho\overline{y}^2)} \sim -\frac{\rho}{\ln(\rho)\overline{y}^2} \to 0,$$

quindi la funzione è differenziabile.