Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Calcolare le derivate parziali prime delle funzioni:

$$a)\ \frac{\arctan(x/y)}{x^2+y^2}, \qquad b)\ \log(1+\cos(xy)), \qquad c)\ \sqrt{x^2+3y^2}.$$

☒ 2. Calcolare le derivate parziali prime di $(x^2z^2+y^2)\log(z^2y-x)$.

☒ 3. Calcolare la derivata direzionale:

a) di $x^2\log(x^2+y^2)$ nel punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e nella direzione del vettore $(\sqrt{2}, 1)$;

b) di $2x - 3\sqrt{2x^2+y}$ nel punto $(0,3)$ e nella direzione del vettore $(1, \sqrt{3})$.

c) di $x^2 - xz + xy^2$ nel punto $(-1,2,0)$ e nella direzione del vettore $(1,1)$;

d) di $\sqrt{z+xy^2}$ nel punto $(2,2,1)$ e nella direzione del vettore $(-2,1,1)$.

(Se il vettore dato non ha modulo unitario, va normalizzato).

☒ 4. In quali punti le funzioni $\sqrt{x^2+y^2}$, $|xy|$ ammettono derivate prime?

❑ 5. Stabilire se la funzione f, definita nei casi di seguito elencati, è differenziabile nell'origine:

$$a)\ \sqrt{|xy|}; \quad b)\ (y-x)\sqrt{x^2+y^2}; \quad c)\ \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

❑ 6. Verificare che se $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ soddisfa le condizioni:

$$f(0)=0, \qquad f(x)\geq |x| \quad \text{per ogni } x\in\mathbb{R}^N,$$

allora f non è differenziabile nell'origine.

☒ 7. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:

$$a)\ \sqrt{1+x^3y^2} \quad \text{nel punto } (2,1); \qquad b)\ \frac{\log(x^2+y)}{y^2-3x} \quad \text{nel punto } (2,-3).$$

☒ 8. Determinare i punti dei grafici delle seguenti funzioni in cui il piano tangente è orizzontale:

$$a)\ x^3y^2(6-x-y), \qquad b)\ x^2ye^{x+y}.$$

☒ 9. Determinare i punti del grafico della funzione $1/(x^2+y^2)$ in cui il piano tangente è ortogonale alla retta di equazioni

$$x = \frac{1}{2}t, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \qquad z = \frac{1}{2}t.$$

❑ 10. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si annulla in $(0,0)$ e vale

$$f(x,y) = \sin(x+y^2)\log(x^2+y^2)$$

se $(x,y) \neq (0,0)$. La funzione f è continua? È differenziabile? Lungo quali direzioni v esiste $\partial f/\partial v$ in $(0,0)$?

Soluzioni

1. *a*)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}\cdot(x^2+y^2) - [\arctan(x/y)]2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y - 2x\arctan(x/y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{-x}{y^2}\cdot(x^2+y^2) - [\arctan(x/y)]2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x + 2y\arctan(x/y)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y\sin(xy)}{1+\cos(xy)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x\sin(xy)}{1+\cos(xy)}\,.$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,.$$

2. Indichiamo con f la funzione in ciascuno dei casi. Si ha::

$$a)\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y-2x\arctan(x/y)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x+2y\arctan(x/y)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$b)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xz^2\log(z^2y-x) + (x^2z^2+y^2)\frac{-1}{z^2y-x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\log(z^2y-x) + (x^2z^2+y^2)\frac{z^2}{z^2y-x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x^2z\log(z^2y-x) + (x^2z^2+y^2)\frac{2yz}{z^2y-x}. \end{aligned}$$

3. Osserviamo innanzitutto che, se il vettore rispetto a cui è richiesto il calcolo della derivata direzionale non è unitario, la derivata direzionale è intesa rispetto al *versore* del vettore dato (cioè il vettore ottenuto da quello dato dividendolo per il suo modulo).

Tutte le funzioni considerate hanno derivate continue in un intorno del punto indicato, per cui esistono le derivate direzionali richieste e si ottengono mediante prodotto scalare fra il gradiente e il vettore direzione.

a) Calcoliamo le derivate parziali di f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\log(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Il versore di $(\sqrt{2},1)$ è $(\sqrt{2/3},1/\sqrt{3}))$; quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \nabla f(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}.$$

b) Procedendo come nel punto precedente, si ha:

$$\nabla f(0,3) = (2,-\frac{\sqrt{3}}{2}), \qquad \hat{\mathbf{u}} = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Quindi: $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(0,3) = 1/4$.
c) La derivata direzionale per funzioni di tre (o più variabili), si calcola come nel caso di due variabili, eseguendo il prodotto scalare fra il gadiente e il versore della direzione. Risulta:

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2x - z + y^2, 2xy, -x\big), \qquad \nabla f(-1,2,0) = (2,-4,1).$$

Inoltre $\hat{\mathbf{u}} = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. Pertanto $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(-1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2+1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
d) Risulta:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{2\sqrt{z+xy^2}}(y^2,2xy,1), \qquad \nabla f(2,2,1) = \frac{1}{6}(4,8,1).$$

Inoltre $\hat{\mathbf{u}} = (-2,1,1)/\sqrt{6}$. Pertanto $\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{u}}}(2,2,1) = \frac{1}{6\sqrt{6}}$.

4. La funzione $t \mapsto \sqrt{t}$ è derivabile su tutto $(0,+\infty)$, per cui, per composizione, la funzione $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ ammette le derivate parziali in ogni punto diverso dall'origine. Nell'origine non ammette nessuna delle due derivate parziali, in quanto le restrizioni agli assi sono la funzione $t \mapsto |t|$ che non è derivabile in zero.

La funzione $t \mapsto |t|$ è derivabile in ogni punto $t \neq 0$, per cui, per composizione, la funzione $f\colon (x,y) \mapsto |xy|$ è derivabile in ogni punto (x,y) con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Nei punti $(x_0,y_0) = (x_0,0)$ con $x_0 \neq 0$ esiste la derivata parziale rispetto a x in quanto $f(x,y_0) = f(x,0) \equiv 0$, mentre non esiste la derivata rispetto a y poiché $f(x_0,y) = |x_0||y|$. In modo analogo si tratta il caso $(x_0,y_0) = (0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$. Nell'origine esistono entrambe le derivate parziali.

5. *a*) La funzione non può essere differenziabile nell'origine poichè questo implicherebbe l'esistenza di tutte le derivate direzionali, mentre lungo le bisettrici $y = \pm x$ la funzione non è derivabile nell'origine:

$$f(x,\pm x) = |x|.$$

(In realtà la derivata direzionale, ad esempio lungo la bisettrice $y = \pm x$, si otterrebbe come derivata della funzione $t \mapsto f(t/\sqrt{2},t/\sqrt{2}) = |t|/\sqrt{2}$).

Alternativamente, si osservi che lungo gli assi la funzione è identicamente nulla, per cui $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Allora il differenziale, se esistesse, dovrebbe essere nullo, per cui dovrebbe essere

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Questo non è vero: si consideri, ad esempio, la restrizione per $h = k$.

$b)$ Anche in questo caso f ha derivate parziali nulle nell'origine, poichè

$$f(x,0) = -x|x|, \qquad f(0,y) = y|y|.$$

Dobbiamo ora calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Tale limite è nullo poichè

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = k - h.$$

Allora f è differenziabile nell'origine.

Alternativamente si può osservare che nei punti diversi dall'origine risulta:

$$f_x(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} + (y-x)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + (y-x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Le derivate parziali sono quindi continue in $(0,0)$, per cui ne scende la differenziabilità di f nell'origine.

$c)$ La funzione è continua, poichè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

(ciò segue da $|f(x,y)| \le |y|$). Inoltre f ammette tutte le derivate direzionali nell'origine:

$$f(0,y) = 0, \qquad f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}x.$$

In particolare $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$; questo, se f fosse differenziabile nell'origine, implicherebbe che ogni derivata direzionale dovrebbe essere nulla, il che non è. Quindi f non è differenziabile nell'origine.

6. Se f fosse differenziabile in 0, esisterebbe $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ lineare e tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - L(x)}{|x|} = 0.$$

Allora

$$\frac{L(x)}{|x|} = \frac{L(x) - f(x)}{|x|} + \frac{f(x)}{|x|} \ge \frac{L(x) - f(x)}{|x|} + 1 \to 1 \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi per $|x|$ sufficientemente piccolo si ha $L(x)/|x| \ge 1/2$, quindi $L(x) \ge (1/2)|x|$: ciò è incompatibile con la linearità di L.

7. Ricordiamo che il piano tangente al grafico di una funzione $f(x,y)$ nel punto $(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{x}, \overline{y}))$ ha equazione

$$z = f(\overline{x},\overline{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})(x-\overline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})(y-\overline{y}).$$

Svolgendo i calcoli si ha:

$$a)\ z = 2x + \frac{8}{3}y - \frac{11}{3}; \qquad b)\ z = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}.$$

8. a) Scriviamo il sistema ottenuto uguagliando a zero le derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2y^2(-4x - 3y + 18) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3y(-2x - 3y + 12) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono: tutti i punti degli assi coordinati e il punto $(3, 2)$.
b) Scriviamo il sistema ottenuto ugualgiando a zero le derivate parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = xy(x + 2)e^{x+y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2(y + 1)e^{x+y} = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono: tutti i punti dell'asse y e il punto $(-2, -1)$.

9. Un vettore normale al piano tangente al grafico di una funzione f di due variabili relativamente al punto (x_0, y_0) è dato da (si ricordi l'equazione del piano tangente)

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1).$$

Pertanto cerchiamo i punti del grafico per i quali il vettore $\mathbf{n}$ è parallelo al vettore della retta data, richiedendo che esista $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{2}\lambda \\ f_y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda \\ -1 = \dfrac{1}{2}\lambda. \end{cases}$$

Dall'ultima si ricava $\lambda = -2$, così che le prime due equazioni diventano:

$$\begin{cases} -\dfrac{2x}{(x^2 + y^2)^2} = -1 \\ -\dfrac{2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Se dividiamo membro a membro otteniamo $y = \sqrt{3}x$, da cui si ricava rapidamente $x^3 = 1/8$ e infine il punto $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

10. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ risulta (ricordiamo che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$):

$$|f(x, y)| \leq |\sin(x + y^2)|\,|\log(x^2 + y^2)| \leq |x + y^2|\,|\log(x^2 + y^2)|,$$

quindi, in coordinate polari:

$$|f| \leq \varrho|\cos\vartheta + \varrho\sin^2\vartheta|\,|2\log\varrho| \to 0 \qquad \text{per } \varrho \to 0.$$

Quindi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$
e la funzione risulta continua nell'origine.

Consideriamo ora la restrizione di f ad una retta per l'origine. Se la retta coincide con l'asse y allora
$$f(0,y) = \begin{cases} \sin(y^2)\log(y^2) & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Considerando il limite del rapporto incrementale in $y = 0$ si vede che tale funzione è derivabile in $y = 0$. Quindi esiste la derivata parziale di f rispetto a y nell'origine. Consideriamo invece la restrizione ad una retta non verticale $y = mx$:
$$f(x,mx) = \begin{cases} \sin(x + m^2x^2)\log[(1+m^2)x^2] & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Valutiamo il limite del rapporto incrementale:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+m^2x^2)}{x} \log[(1+m^2)x^2] = -\infty.$$
Concludiamo che non esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ rispetto ad alcuna direzione diversa dall'asse y. Ne segue, inparticolare, che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.