Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Sia $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione data. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$. Verificare che il grafico di f si ottiene per rotazione del grafico di g attorno all'asse verticale.

Tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$.

❑ 2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ punto di accumulazione per E e $f\colon E\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^m$. Consideriamo la relazione di limite:

$$(L) \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in E\setminus\{x_0\} \qquad |x-x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Si verifichi che si ottiene una condizione equivalente sostituendo una o l'altra (o entrambe) le disuguaglianze strette che compaiono, con la corrispondente disuguaglianza "$\leq$".

☒ 3. Indagare sull'esistenza dei seguenti limiti.

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}; \qquad b) \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y>0}} \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(e^{xy}-1)}{x^2+y^2}.$$

☒ 4. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2(x+1)}{\log(x^2+y^2+1)}; \qquad b) \lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2\frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2-2x+1}.$$

❑ 5. Indagare sull'esistenza dei seguenti limiti:

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}; \qquad b) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)}{x^2+y^2}\sin(x+y)^2; \qquad c) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Possono essere utili le disuguaglianze $(a,b \geq 0)$: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ e $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

☒ 6. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare che se esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(y/x)$ allora g è costante.

❑ 7. Si considerino i problemi di limite seguenti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{2}\log x - \log y\right); \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+xy}.$$

È possibile inquadrare in uno stesso risultato questi casi e quanto visto nell'esercizio 6?

❑ 8. Verificare che la funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

a) La funzione f è limitata?

b) Esistono i seguenti limiti?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \qquad \lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y), \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y),$$

nei casi in cui $A = \{(x,y):\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ e $A = \{(x,y):\ |y| \leq x^2\}$

b) Verificare che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} \frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy} = 1,$$

dove $B = \{(x,y):\ y \geq 0,\ 0 \leq x^2+y^2-2y \geq 0\}$

❑ 9. Sia R una matrice 2×2 ad elementi reali. Supponiamo che

$$s := \sup_{|x|\leq 1} |Rx| < 1.$$

Studiare la convergenza della successione (x_k) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{k+1} = Rx_k, \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}^2$ è un punto assegnato.

❑ 10. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in $\mathbb{R}^N$. Sia $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$ tale che:

ogni sottosuccessione di (x_n) ammette una sotto-sottosuccessione convergente a $\overline{x}$.

Si dimostri che allora tutta la successione (x_n) converge a $\overline{x}$. [Si proceda per assurdo]

☒ 11. Disegnare le curve di livello delle seguenti funzioni:

$$a)\ \frac{x^2+y^2}{x}, \qquad b)\ \frac{y}{xy-x+1}, \qquad c)\ \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}.$$

(Per la terza è utile usare le coordinate polari).

❑ 12. Sia f definita da $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Esiste il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$? Esiste il limite, per $(x,y) \to (0,0)$, della restrizione di f all'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ \ x > 2|y|\}$?

Soluzioni

1. Se $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$, le linee di livello di f sono tutte circonferenze, quindi il grafico è di rotazione attorno all'asse z. Alternativamente, si può osservare che lungo ogni semiretta uscente dall'origine la funzione, vista come funzione della coordinata $t =$ *distanza dall'origine,* è sempre la stessa, indipendentemente dalla direzione: lungo ogni semiretta il grafico di $z = f(x,y)$ di f coincide con quello $z = g(t)$ di g.

La funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ è di questa tipologia per $g(t) = t^2e^t$.

2. Verifichiamo, ad esempio, che (L) è equivalente alla condizione $(\tilde{L})$ ottenuta rimpiazzando $|x - x_0| < \delta$ con $|x - x_0| \le \delta$.

Sia valida (L); sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ il corrispondente valore fornito da (L); si scelga ora un qualunque valore $\delta' > 0$ con $\delta' < \delta$. Allora, se $|x - x_0| \le \delta'$, si ha anche $|x - x_0| < \delta$, per cui $|f(x) - l| < \varepsilon$.

L'implicazione opposta, $(\tilde{L}) \Rightarrow (L)$, è ovvia.

3. *a*) Comunque preso $(x,y) \ne (0,0)$ risulta:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y| \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

Alternativamente, scrivendo la funzione in coordinate polari:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{\varrho^3|\cos^2\vartheta\sin\vartheta|}{\varrho^2} \le \varrho \to 0 \qquad \text{per } \varrho \to 0.$$

b) Guardiamo la restrizione della funzione a una semiretta r uscente dall'origine: $y = mx > 0$ (quindi $m \ne 0$):

$$\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{|mx|}{(1+m^2)x^2} = \frac{|m|}{(1+m^2)|x|} \to +\infty \quad \text{per } x \to 0.$$

Del resto, considerando la parabola $y = x^2$ si ha:

$$\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=x^2} = \frac{x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2} \to 1 \quad \text{per } x \to 0.$$

c) Sappiamo che $e^t - 1 = t(1+\sigma(t))$, con σ infinitesimo per $t \to 0$. Allora:

$$\frac{y(e^{xy}-1)}{x^2+y^2} = \frac{xy^2(1+\sigma(xy)}{x^2+y^2}.$$

Quanto svolto al punto (a) permette di concludere che il limite vale zero.

4. a) La funzione si può separare nella somma

$$\frac{x^2+y^2}{\log(x^2+y^2+1)}+\frac{xy^2}{\log(x^2+y^2+1)}$$

Il primo addendo tende a 1 per $(x,y)\to(0,0)$: infatti, posto $t=x^2+y^2$, non è altro che $t/\log(t+1)$. Il secondo addendo, in coordinate polari, diventa:

$$\frac{\varrho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{\log(\varrho^2+1)}\to 0 \qquad \text{per } \varrho\to 0.$$

b) La funzione non è altro che:

$$\frac{y^2}{(x-1)^2+y^2}(e^{xy}-1).$$

Il primo fattore è limitato da 1, mentre il secondo è infinitesimo, per cui il limite del prodotto è nullo.

5. a) Comunque preso $(x,y)\neq(0,0)$ risulta:

$$\left|\frac{x^3y}{x^4+y^2}\right|=\frac{x^2|y|}{(x^2)^2+y^2}|x|.$$

Utilizziamo ora la disuguaglianza $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (che segue subito dalla positività del quadrato $(a-b)^2$):

$$\frac{x^2|y|}{(x^2)^2+y^2}|x|\leq\frac{\frac{1}{2}((x^2)^2+y^2)}{(x^2)^2+y^2}|x|=\frac{1}{2}|x|\to 0 \qquad \text{per } (x,y)\to(0,0).$$

b) Se guardiamo il comportamento lungo le rette per l'origine si nota che il valore limite è sempre nullo. Verifichiamo che effettivamente il limite è nullo. Utilizziamo la disuguaglianza $|\sin t|\leq|t|$ per ogni t, e l'espressione di x e y in coordinate polari:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(x+y)}{x^2+y^2}\sin(x+y)^2\right| &\leq\frac{|x+y|^3}{x^2+y^2}=\frac{\varrho^3|\cos\vartheta+\sin\vartheta|^3}{\varrho^2}\\ &=\varrho|\cos\vartheta+\sin\vartheta|^3\to 0 \qquad \text{per } \varrho\to 0.\end{aligned}$$

Alternativamente, utilizzando la disuguaglianza $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$, si poteva osservare che

$$\left|\frac{\sin(x+y)^2}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x+y|^2}{x^2+y^2}\leq\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=2.$$

La funzione data è quindi il prodotto fra la funzione infinitesima $x+y$ e la funzione limitata $\sin(x+y)^2/(x^2+y^2)$.

c) Il limite lungo le restrizioni alle rette per l'origine è nullo. Ma se consideriamo la curva $x+y=x^3$, cioè $y=-x+x^3$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{x+y}&=\frac{x^2+(-x+x^3)^2}{x^3}=\frac{x^2[1+(1-x^2)^2]}{x^3}\\ &=\frac{1+(1-x^2)^2}{x}\to\pm\infty \qquad \text{per } x\to 0^{\pm}.\end{aligned}$$

Pertanto il limite proposto non esiste.

6. Indichiamo con l il valore limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(y/x)$. Fissiamo un valore $m \in \mathbb{R}$ arbitrario. Restringendo la funzione $f(x,y) = g(y/x)$ alla retta $y = mx$ il limite nell'origine è sempre l; ma su tale retta la funzione f è costante con valore $f(x, mx) = g(m)$. Quindi $g(m) = l$ per ogni $m \in \mathbb{R}$.

7. In tutti i casi si tratta di funzioni f della forma $f(x,y) = g(y/x^\alpha)$: nei tre casi il valore di α è $1/2$, 2 e 1, rispettivamente.

8. Verifichiamo che il denominatore $x^2 + y^2 + xy$ si annulla soltanto se $x = y = 0$. Infatti sia, ad esempio, $x \neq 0$; allora

$$x^2 + y^2 + xy = x^2\bigl(t^2 + t + 1\bigr), \qquad \text{con } t = \frac{y}{x}.$$

Concludiamo osservando che $t^2 + t + 1$ non si annulla mai.

a) Risulta $f(0,y) = 0$, mentre se $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$\frac{xy}{x^2 + y^2 + xy} = \frac{t}{t^2 + t + 1}, \qquad \text{con } t = \frac{y}{x}.$$

Tale funzione è limitata, come subito si verifica.

Alternativamente, si stimi la funzione utilizzando il fatto che $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$:

$$|f(x,y)| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \leq 1.$$

b) Valutiamo f lungo le rette per l'origine; se $y = mx$ risulta:

$$f(x, mx) = \frac{m}{m^2 + m + 1}.$$

Quindi le rette per l'origine sono linee di livello di f per cui non esiste il primo dei limiti proposti. Per il medesimo motivo non esiste nemmeno il limite per $|(x,y)| \to +\infty$.

Consideriamo ora il limite per $(x,y) \to (0,0)$ della restrizione di f all'insieme $A = \{(x,y) :\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$. Poiché $x, y \geq 0$, risulta $x^2 + y^2 + xy \geq x^2$, per cui

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^3}{x^2} = x \to 0 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi il limite di $f\Big|_A$ è nullo.

Osservazione. Se fosse stato $A = \{(x,y) :\ 0 \leq y \leq x^2\}$, il denominatore poteva essere stimato, ad esempio, come segue:

$$x^2 + y^2 + xy \geq x^2 + xy \geq x^2 - |x|^3 = x^2(1 - |x|);$$

si concludeva in modo analogo.

Sia ora $A = \{(x,y) :\ |y| \leq x^2\}$. Ponendo, come sopra, $y/x = t$ (necessariamente ora è $x \neq 0$) risulta $t \to 0$, poiché $|y| \leq x^2$. Allora

$$|f(x,y)| = \frac{t}{t^2 + t + 1} \to 0 \qquad \text{per } t \to 0.$$

b) L'insieme B è la parte del semipiano $y \geq 0$ esterna al cerchio di centro il punto $(0,1)$ e raggio 1. Consideriamo la differenza fra la funzione e il valore 1; tenendo conto che $x^2+y^2 \geq 2y$ e $y \geq 0$, risulta (per $y > 0$ e $x > -2$):

$$\left|\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy} - 1\right| = \frac{2|xy|}{x^2+y^2+xy} \leq \frac{2|xy|}{2y+xy} = $$
$$= \frac{2|x|}{2+x} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0)$$

(se $y = 0$ la funzione ha valore costante 1). Oppure, dopo la prima uguaglianza, si utilizzi il risultato del punto (*b*) (vedi OSSERVAZIONE precedente), dal momento che se $(x,y) \in B$ allora $0 \leq y \leq x^2$: infatti, $(x,y) \in B$ implica che (se $|x|, |y| \leq 1$) deve essere $0 \leq y \leq 1 - \sqrt{1-x^2} \leq x^2$.

Alternativamente, scrivendo la funzione in coordinate polari, si ottiene:

$$\frac{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta + \cos\vartheta\sin\vartheta} = \frac{1-\cos\vartheta\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta\sin\vartheta}.$$

Come si intuisce geometricamente, se il punto $(x,y) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)$ tende all'origine rimanendo in B, allora $\sin\vartheta \to 0$; del resto, la condizione $(x,y) \in B$ significa

$$\varrho \geq 2\sin\vartheta \geq 0,$$

da cui $\sin\vartheta \to 0$. Allora, dall'espressione sopra ricavata per la funzone in coordinate polari, si ricava che il limite è 1.

9. Comunque preso $x \in \mathbb{R}^2$ risulta

$$|Rx| \leq s|x|.$$

Infatti, se $x \neq 0$ poniamo $u = x/|x|$ e osserviamo che

$$|Rx| = |R(|x|u)| = |x|\,|Ru| \leq s|x|.$$

Allora $|x_{k+1}| \leq s|x_k|$ e, iterando:

$$|x_k| \leq s^k|x_0| = s^k|a| \to 0 \qquad k \to +\infty.$$

Pertanto $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$.

10. Se non fosse vero che $x_n \to \overline{x}$, allora (si neghi la condizione di limite) esisterebbe $\overline{\varepsilon} > 0$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ sarebbe possibile individuare un indice $n_k > k$ tale che $|x_{n_k} - \overline{x}| > \overline{\varepsilon}$. La successione (n_k) può essere scelta strettamente crescente (ad ogni passo si scelga come indice il più piccolo degli indici che verificano la condizione e che sono strettamente maggiori del precedente). Allora $\left(x_{n_k}\right)$ è una sottosuccessione della successione di partenza che sta tutta al di fuori della palla $\overline{B}_{\overline{\varepsilon}}(\overline{x})$: non può pertanto ammettere alcuna sottosuccessione convergente a $\overline{x}$.

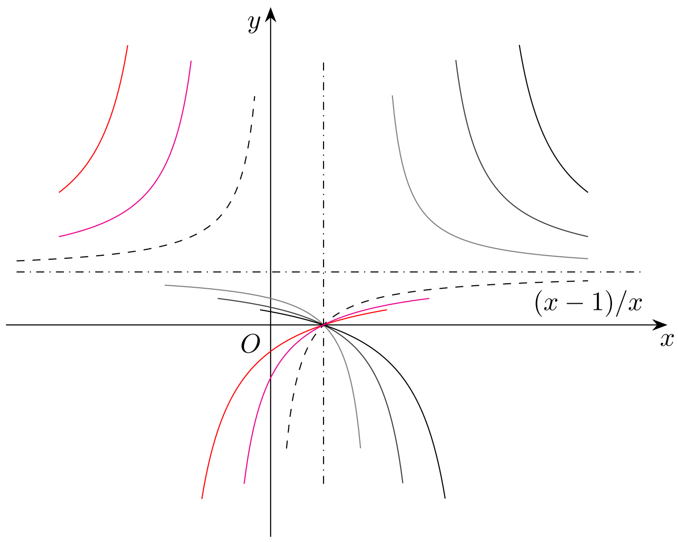

Figura 1 - Esercizio 11(b)

11. *a*) La curva di livello C ha equazione:

$$x^2 + y^2 - Cx = 0,$$

con l'esclusione dei punti in cui $x = 0$. Si tratta della circonferenza di centro $(C/2, 0)$ passante per l'origine, con l'esclusione dell'origine.

b) Osserviamo innanzitutto che la funzione non è definita nei punti (x, y) per i quali $xy - x + 1 = 0$, cioè nei punti dell'iperbole

$$y = \frac{x-1}{x}.$$

La linea di livello $C = 0$ è l'asse x; se $C \neq 0$ poniamo $\gamma = 1/C \neq 0$, per cui la linea di livello C diventa:

$$\frac{y}{xy - x + 1} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{cioè} \quad y = \frac{x-1}{x-\gamma} \quad \text{se } \gamma \neq 1. \tag{1}$$

Se $\gamma = 1$ si ottiene $(x-1)(y-1) = 0$, quindi la coppia di rette di equazione $x = 1$ e $y = 1$. Le curve in (1) sono iperboli che hanno la retta $y = 1$ come uno degli asintoti (vedi Figura 1).

c) La funzione non è definita sulle bisettrici $y = \pm x$. La linea di livello C ha equazione $(x^2 + y^2)^2 = C(x^2 - y^2)$, con l'esclusione degli eventuali punti sulle bisettrici: in realtà (si ponga $y = \pm x$) si tratta di escludere la sola origine $(0, 0)$. In coordinate polari l'equazione diventa:

$$\varrho^2 = C \cos 2\vartheta$$

(si tratta di una *lemniscata*). Se $C > 0$ la curva si trova nella zona del piano in cui $\cos 2\vartheta > 0$, cioè per $\vartheta \in (-\pi/4, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4)$ (vedi Figura 2). Se $C < 0$ si ha la regione complementare,

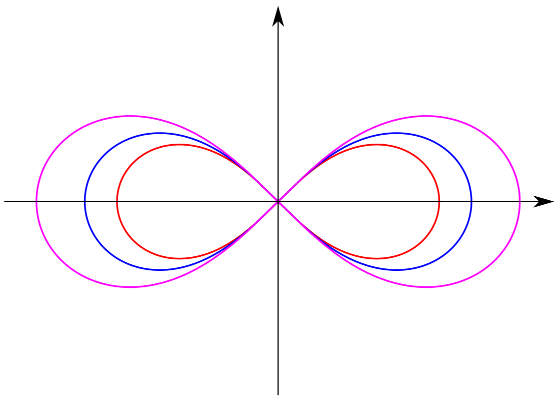

Figura 2 - Vedi esercizio 11 (c)

12. Poiché tutte le curve di livello presentano l'origine come punto di accumulazione (si ottengono lemniscate centrate nell'origine), il limite di f per $(x, y) \to (0, 0)$ non esiste. Se invece ci restringiamo all'insieme definito dalla disuguaglianza $x > 2|y|$, allora:

$$\begin{aligned} 0 \le f(x, y) \le \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} &\le \frac{x^2 + x^2/4}{\sqrt{x^2 - x^2/4}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{3}}\, x \to 0 \qquad \text{per } (x, y) \to (0, 0). \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x>2|y|}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

Alternativamente, si stimi il denominatore mediante

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 - y^2 \ge \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - y^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$