Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Calcolare il polinomio di Taylor di terzo grado delle seguenti funzioni relativamente al punto indicato:

$$a)\ e^{2x+3y}, \quad (0,0); \qquad b)\ \log(x^2+y^2), \quad (1,0);$$

❑ 2. Utilizzando lo sviluppo delle funzioni elementari, calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado delle seguenti funzioni relativamente al punto indicato:

$$a)\ \log(2x^2+y), \quad (1,0); \qquad b)\ \sqrt{x^2+y^3}, \quad (1,2),$$

e il polinomio di terzo grado di

$$c)\ \frac{y+1}{x^2+1} \qquad \text{relativamente al punto } (1,0).$$

❑ 3. Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-1+e^y)-x-y}{x^2+|y|}.$$

[Può essere utile uno sviluppo di Taylor].

☒ 4. Calcolare, relativamente al punto $(0,0)$, i polinomi di Taylor di terzo grado delle funzioni:

$$xe^{x+2y}, \quad \frac{1}{2x-y+1}, \quad e^{x^2+y}.$$

(Si ricordi lo sviluppo della funzione $1/(1-t)$).

☒ 5. Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 3 di $y\sin x - \cos(y^2-x-1)$ relativo al punto $(0,-1)$.

Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 1 e quello di grado 2 della funzione $-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ centrati nel punto $(-2,1)$.

☒ 6. Qual è l'immagine della funzione $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$ (al variare di $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$)?

☒ 7. Dimostrare che se $f\colon A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^N$ connesso, è continua e assume valori in $\mathbb{Z}$ allora f è costante.

❑ 8. Sia $N=2$ o $N=3$ e $S^{N-1}=\{x\in\mathbb{R}^N:\ |x|=1\}$. Sia $f\colon S^{N-1}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che esiste $x_0\in S^{N-1}$ tale che $f(x_0)=f(-x_0)$.

[Si consideri la funzione $x\mapsto f(x)-f(-x)$].

Soluzioni

1. Il polinomio di Taylor può essere calcolato a partire dall'espressione dei coefficienti, calcolando tutte le derivate necessarie. Per le funzioni proposte svolgiamolo invece utilizzando, dove possibile, gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari.

a) Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \sigma(t),$$

dove σ è una funzione, nulla in 0, tale che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t)}{t^3} = 0.$$

Allora

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x+3y) + \frac{(2x+3y)^2}{2} + \frac{(2x+3y)^3}{3!} + \sigma(2x+3y).$$

Mostriamo che $\sigma(2x+3y) = o\big(|(x,y)|^3\big)$, cioè

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} \frac{\sigma(2x+3y)}{|(x,y)|^3} = 0.$$

Infatti σ può essere scritta come

$$\sigma(t) = t^3 \varepsilon(t),$$

con $\varepsilon(t)$ infinitesimo; poiché $|2x+3y| \le 5|(x,y)|$, si ha

$$|\sigma(2x+3y)| \le \big(5|(x,y)|\big)^3 \varepsilon(2x+3y) \le C|(x,y)|^3 \varepsilon(2x+3y), \qquad (C = 5^3),$$

da cui

$$\frac{|\sigma(2x+3y)|}{|(x,y)|^3} \le C\varepsilon(2x+3y) \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor risulta

$$P_3(x,y) = 1 + (2x+3y) + \frac{(2x+3y)^2}{2} + \frac{(2x+3y)^3}{3!}.$$

b) La funzione $x^2 + y^2$ assume valore 1 nel punto $(1,0)$; per utilizzare lo sviluppo del logaritmo conviene mettere in evidenza gli incrementi: $h = x - 1$, $k = y - 0 = y$. La funzione diventa quindi

$$\log(1+t), \qquad \text{con} \quad t = 2h + h^2 + k^2.$$

Ricordiamo ora che

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \sigma(t), \qquad \text{con} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t)}{t^3} = 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\log(x^2+y^2) = (2h+h^2+k^2) &- \frac{1}{2}(2h+h^2+k^2)^2 \\ &+ \frac{1}{3}(2h+h^2+k^2)^3 + \sigma(2h+h^2+k^2),\end{aligned} \tag{1}$$

Mostriamo che risulta:

$$\lim_{|(h,k)|\to 0} \frac{\sigma(2h+h^2+k^2)}{|(h,k)|^3} = 0. \tag{2}$$

Come nel caso precedente, scriviamo $\sigma(t) = t^3\varepsilon(t)$, con $\varepsilon(t)$ infinitesimo. Per $|(h,k)|$ sufficientemente piccolo risulta

$$|2h+h^2+k^2| \leq C|(h,k)| \qquad \text{(ad esempio } C = 4\text{);}$$

quindi

$$|\sigma(2h+h^2+k^2)| \leq (C|(x,y)|)^3 \varepsilon(2h+h^2+k^2),$$

da cui (2).

Riprendiamo ora la (1), sviluppando le potenze; otteniamo:

$$\begin{aligned}\log(x^2+y^2) &= 2h+h^2+y^2-2h^2-2h^3-2hy^2+\frac{8}{3}h^3+Q(h,y)+\tau(h,y), \\ &= 2h-h^2+y^2+\frac{2}{3}h^3-2hy^2+Q(h,y)+\tau(h,y),\end{aligned}$$

dove $Q(h,y)$ è un polinomio i cui termini hanno grado non inferiore a 4. Assieme a (2) ciò implica che $2h-h^2+y^2+\frac{2}{3}h^3-2hy^2$ è il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione data relativa al punto $(1,0)$:

$$P_3(x-1,y) = 2(x-1)-(x-1)^2+y^2+\frac{2}{3}(x-1)^3-2(x-1)y^2.$$

Si noti che il grado del polinomio è valutato rispetto alle variabili $x-1$ e y.

2. *a*) Osserviamo che $2x^2+y$ assume valore 2 nel punto $(1,0)$; per utilizzare lo sviluppo del logaritmo attorno a 1 conviene porre la funzione nella forma

$$\log(2x^2+y) = \log 2 + \log\bigl(x^2+\frac{y}{2}\bigr)$$

Mettiamo poi in evidenza gli incrementi, ponendo $h = x-1$ e $k = y$:

$$\begin{aligned}\log(2x^2+y) &= \log 2 + \log\bigl((h+1)^2+\frac{k}{2}\bigr) \\ &= \log 2 + \log\bigl(1+2h+\frac{k}{2}+h^2\bigr).\end{aligned}$$

Sviluppiamo pertanto il secondo addendo in potenze di h e k. Risulta:

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \sigma(t), \qquad \text{con} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sigma(t)}{t^2} = 0.$$

Sostituendo t con $2h + \frac{k}{2} + h^2$ si ha

$$\log\big(1 + 2h + \frac{k}{2} + h^2\big) = 2h + \frac{k}{2} + h^2 - \frac{1}{2}(2h + \frac{k}{2} + h^2)^2 + \tau(h,k), \tag{3}$$

dove $\tau(h,y) = \sigma(2h + \frac{k}{2} + h^2)$. In modo analogo a quanto fatto nell'Esercizio 1 si dimostra che

$$\lim_{|(h,y)|\to 0} \frac{\tau(h,y)}{|(h,y)|^2} = 0.$$

Allora il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione iniziale relativa al punto $(1,0)$ si ottiene considerando, in (3), i soli termini di grado non superiore a 2. Pertanto:

$$P_2(x-1,y) = \log 2 + 2(x-1)^2 + \frac{1}{2}y - (x-1)^2 - \frac{1}{8}y^2 - (x-1)y.$$

b) Vorremmo utilizzare lo sviluppo della funzione $\sqrt{1+t}$ relativamente a $t_0 = 0$:

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \sigma(t), \qquad \text{con} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(t)}{t^2} = 0$$

Teniamo conto che $(x^2+y^3)\Big|_{(1,2)} = 9$, per cui conviene esprimere la funzione come

$$\sqrt{x^2+y^3} = 3\big(\frac{x^2+y^3}{9}\big)^{1/2}.$$

Mettiamo ora in evidenza gli incrementi rispetto al punto $(1,2)$, ponendo

$$h = x - 1, \qquad k = y - 2.$$

Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^3} &= 3\left[\frac{(h+1)^2 + (k+2)^3}{9}\right]^{1/2}\\ &= 3\left(1 + \frac{2h + 12k + h^2 + 6k^2 + k^3}{9}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

e applicare lo sviluppo di $(1+t)^{1/2}$ con

$$t = \frac{2h + 12k + h^2 + 6k^2 + k^3}{9}.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^3} = 1 &+ \frac{1}{2}\left(\frac{2h + 12k + h^2 + 6k^2 + k^3}{9}\right)\\ &- \frac{1}{8}\left(\frac{2h + 12k + h^2 + 6k^2 + k^3}{9}\right)^2 + \tau(h,k),\end{aligned}$$

dove $\tau(h,k) = \sigma\big((2h + 12k + h^2 + 6k^2 + k^3)/9\big)$. In modo analogo a quanto svolto sopra, si verifica che

$$\lim_{|(h,k)|\to 0} \frac{\tau(h,k)}{|(h,k)|^2} = 0.$$

Allora otteniamo il polinomio di Taylor di grado 2 limitandoci a considerare, nello sviluppo precedente, i termini di grado non superiore a 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}P_2(h,k) &= 1+\frac{1}{9}h+\frac{2}{3}k+\frac{1}{18}h^2+\frac{1}{3}k^2-\frac{1}{162}h^2-\frac{2}{9}k^2-\frac{1}{3}hk\\ &= 1+\frac{1}{9}h+\frac{2}{3}k+\frac{4}{81}h^2+\frac{1}{9}k^2-\frac{2}{27}hk.\end{aligned}$$

Quindi

$$P_2(h,k) = 3+\frac{1}{3}h+2k+\frac{4}{27}h^2+\frac{1}{3}k^2-\frac{2}{9}hk,$$

con $h = x-1$ e $k = y-2$.

c) Sviluppiamo la funzione $1/(x^2+1)$ relativamente al punto $\overline{x} = 1$, ricordando lo sviluppo della serie geometrica:

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+t^3+\dots$$

Posto $x-1 = h$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+h+\frac{1}{2}h^2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-(h+\frac{1}{2}h^2)+(h+\frac{1}{2}h^2)^2-(h+\frac{1}{2}h^2)^3\right)+o(h^3)\\ &= \frac{1}{2}\big(1-h+\frac{1}{2}h^2\big)+o(h^3).\end{aligned}$$

Moltiplichiamo ora per il polinomio $y+1$:

$$\frac{y+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}(y+1)\big(1-h+\frac{1}{2}h^2\big)+\sigma(h,y),$$

dove $\sigma(h,y) = (y+1)o(h^3)$. Risulta

$$|\frac{\sigma(h,y)}{|(h,y)|^3}| \le |(y+1)\frac{o(h^3)}{h^3}| \to 0 \qquad \text{per } |(h,y)| \to 0.$$

Allora

$$\lim_{|(h,y)|\to 0}\frac{\sigma(h,y)}{|(h,y)|^3} = 0.$$

Concludiamo che

$$P_2(h,y) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{2}hy+\frac{1}{4}h^2y.$$

3. Per lo sviluppo della funzione $\sin(x-1+e^y)$ conviene svolgere direttamente il calcolo delle derivate nel punto $(0,0)$; si ottiene

$$\sin(x-1+e^y) = x+y+\frac{1}{2}y^2+\eta(x,y), \quad \text{con} \quad \lim_{|(x,y)|\to 0}\frac{\eta(x,y)}{|(x,y)|^2} = 0.$$

Allora

$$\frac{\sin(x-1+e^y)-x-y}{x^2+|y|}=\frac{\frac{1}{2}y^2+\eta(x,y)}{x^2+|y|}=\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2+|y|}+\frac{\eta(x,y)}{x^2+|y|}.$$

Il primo addendo nell'ultimo membro tende a zero, poiché

$$\frac{y^2}{x^2+|y|}\leq\frac{y^2}{|y|}=|y|\to 0 \quad \text{per } (x,y)\to(0,0).$$

Quanto al secondo addendo, osserviamo che per $|y|$ sufficientemente piccolo ($|y|\leq 1$) risulta $x^2+|y|\geq x^2+y^2$, per cui

$$\frac{\eta(x,y)}{x^2+|y|}\leq\frac{\eta(x,y)}{x^2+y^2}=\frac{\eta(x,y)}{|(x,y)|^2}\to 0.$$

Allora anche questo termine tende a zero. Concludiamo che il limite proposto vale zero.

Vediamo come si potrebbe ottenere lo sviluppo del numeratore utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari.

Sviluppiamo la funzione $x-1+e^y$ relativamente al punto $(0,0)$:

$$x-1+e^y=x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y), \quad \text{con} \quad \lim_{y\to 0}\frac{\tau(y)}{y^2}=0,$$

e la funzione $\sin t$ relativamente a $t=0$ (poiché $(x-1+e^y)_{|(0,0)}=0$):

$$\sin t=t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3)=t+\sigma(t), \quad \text{con} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sigma(t)}{t^2}=0.$$

Osserviamo che possiamo esprimere τ e σ nella forma:

$$\tau(y)=y^2\varepsilon_1(y) \qquad \sigma(t)=t^2\varepsilon_2(t),$$

con ε_1 e ε_2 infinitesimi. Quindi

$$\begin{aligned}\sin(x-1+e^y)&=\sin\big(x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)\big)\\&=x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)+\sigma\big(x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)\big).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$y^2\leq|(x,y)|^2 \quad \text{e} \quad \big|x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)\big|^2\leq C|(x,y)|^2$$

(la seconda disuguaglianza per $|(x,y)|$ sufficientemente piccolo; per tali valori possiamo supporre $|\tau(y)|\leq y^2\leq|y|$). Abbiamo allora

$$|\tau(y)+\sigma\big(x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)\big)|\leq|(x,y)|^2\varepsilon(x,y)$$

con $\varepsilon(x,y)$ infinitesima per $(x,y)\to(0,0)$ (risulta $\varepsilon(x,y)=\varepsilon_1(y)+C\varepsilon_2\big(x+y+\frac{1}{2}y^2+\tau(y)\big)$. Pertanto

$$\sin(x-1+e^y)=x+y+\frac{1}{2}y^2+\eta(x,y), \quad \text{con} \quad \lim_{|(x,y)|\to 0}\frac{\eta(x,y)}{|(x,y)|^2}=0.$$

4. Il punto rispetto a cui è centrato il polinomio di Taylor è l'origine, per cui gli incrementi coincidono con x e y.

Ricordando lo sviluppo in serie della funzione esponenziale abbiamo

$$e^{x+2y} = 1 + (x+2y) + \frac{1}{2}(x+2y)^2 + \frac{1}{3!}(x+2y)^3 + \sigma(x+2y),$$

con $\sigma(t) = o(t^3)$. Scriviamo σ nella forma $\sigma(t) = t^3\varepsilon(t)$, con $\varepsilon(t)$ infinitesimo. Poiché $|x+2y| \le 3|(x,y)|$, risulta

$$|\sigma(x+2y)| \le 27|(x,y)|^3\varepsilon(x+2y).$$

Quindi $\sigma(x+2y) = o\big(|(x,y)|^3\big)$. Il polinomio di Taylor di terzo grado è quindi il polinomio $1 + (x+2y) + \frac{1}{2}(x+2y)^2 + \frac{1}{3!}(x+2y)^3$.

In modo analogo procediamo per la funzione $1/(2x-y+1)$, sfruttando lo sviluppo di $(1-t)^{-1}$:

$$\frac{1}{1-(y-2x)} = 1 + (y-2x) + (y-2x)^2 + (y-2x)^3 + \sigma(y-2x),$$

con $\sigma(t) = o(t^3)$. Come sopra si dimostra che $\sigma(y-2x) = o\big(|(x,y)|^3\big)$, per cui il polinomio di Taylor di grado 3 è $1 + (y-2x) + (y-2x)^2 + (y-2x)^3$.

Per quanto riguarda l'ultima funzione, lo sviluppo della funzione esponenziale dà:

$$e^{x^2+y} = 1 + (x^2+y) + \frac{1}{2}(x^2+y)^2 + \frac{1}{3!}(x^2+y)^3 + \sigma(x^2+y),$$

dove $\sigma(t) = t^3\varepsilon(t)$, con $\varepsilon(t)$ infinitesimo. Per $|(x,y)| < 1$ abbiamo $x^2 \le |x| \le |(x,y)|$, quindi

$$|\sigma(x^2+y)| \le 8|(x,y)|^3\varepsilon(x^2+y).$$

Allora $\sigma(x^2+y) = o\big(|(x,y)|^3\big)$ e il polinomio di Taylor di grado 3 si ottiene dal polinomio che compare nello sviluppo precedente limitandosi a considerare i termini di grado non superiore a 3; quindi

$$P_3(x,y) = 1 + y + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{6}y^3.$$

5. Esplicitiamo gli incrementi (h,k) rispetto al punto $(0,-1)$:

$$x = h, \qquad y = -1 + k.$$

Allora

$$f(x,y) = f(h,k-1) = (k-1)\sin h - \cos(k^2 - 2k - h).$$

Ricordiamo che

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \sigma_1(t), \qquad \text{con } \sigma_1(t) = o(t^3),$$
$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \sigma_2(t), \qquad \text{con } \sigma_2(t) = o(t^3).$$

Quindi

$$f(h,-1+k) = (k-1)(h-\frac{1}{6}h^3) - \big[1-\frac{1}{2}(k^2-2k-h)^2\big] + r(h,k), \tag{4}$$

con

$$r(h,k) = (k-1)\sigma_1(h) - \sigma_2(k^2-2k-h).$$

Scriviamo σ_1 e σ_2 nella forma

$$\sigma_1(t) = t^3\varepsilon_1(t), \qquad \sigma_2(t) = t^3\varepsilon_2(t), \qquad \text{con } \varepsilon_{1,2}(t) = o(1).$$

Allora

$$|r(h,k)| \le |(k-1)h^3\varepsilon_1(h)| + |(k^2-2k-h)^3\varepsilon_2(k^2-2k-h)|$$

Pertanto, per $|(h,k)| < 1$, quindi in particolare $|k| < 1$, si ha $|k-1| < 2$, $k^2 \le |k|$ e $|(k^2-2k-h)| < 4|(h,k)|$, per cui

$$|r(h,k)| \le C|(h,k)|^3\Big(|\varepsilon_1(h)| + |\varepsilon_2(k^2-2k-h)|\Big)$$

con $C > 0$ costante opportuna. Ne segue che $r(h,k) = o\big(|(h,k)|^3\big)$.

Concludiamo che il polinomio di Taylor di grado 3 si ottiene dal polinomio che compare in (4). limitandosi a considerare i termini di grado non superiore a 3, quindi

$$P_3(h,k) = -1 - h + 3hk + \frac{1}{2}h^2 + 2k^2 + \frac{1}{6}h^3 - hk^2 - 2k^3.$$

Consideriamo ora la funzione $g(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$. Ricordiamo che il grado di un polinomio di Taylor è riferito agli incrementi rispetto al punto fissato; in questo caso:

$$x = -2 + h, \qquad y = 1 + k.$$

Quindi la funzione g diventa

$$g(-2+h, 1+k) = 1 - h^2 + 2hk + 3k^2.$$

Allora il polinomio di grado 1 ha in realtà grado zero (la costante 1), mentre il polinomio di grado 2 è il polinomio

$$P_2(h,k) = 1 - h^2 + 2hk + 3k^2.$$

6. Il dominio della funzione è un insieme connesso, per cui l'immagine è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$, cioè un intervallo. Dalla disuguaglianza $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ segue che i valori $f(x,y)$ si trovano nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Si vede facilmente che i valori estremi $\pm\frac{1}{2}$ sono assunti: si prenda $y = \pm x$. Allora l'immagine di f è l'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Alternativamente, dato $\gamma \in \mathbb{R}$, si studi la risolubilità dell'equazione:

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \gamma.$$

Se $\gamma = 0$ l'equazione è chiaramente risolubile. Se $\gamma \neq 0$ allora non può essere $x = 0$, per cui l'equazione si scrive, equivalentemente, come:

$$\frac{y/x}{1+(y/x)^2} = \gamma,$$

cioè, posto $t = y/x$,

$$\frac{t}{1+t^2} = \gamma, \qquad \text{o anche} \quad \gamma t^2 - t + \gamma = 0.$$

L'equazione è risolubile se e solo se il discriminante è non negativo, cioè $|\gamma| \leq \frac{1}{2}$.

7. Sappiamo che l'immagine continua di un insieme connesso è un insieme connesso. In $\mathbb{R}$, che è il codominio della funzione, gli insiemi connessi sono solo gli intervalli. Poiché la funzione assume solo valori in $\mathbb{Z}$, può assumere un solo valore.

8. Sia $g(x) = f(x) - f(-x)$. La funzione g soddisfa la proprietà che $g(-x) = -g(x)$; pertanto, se g non è la funzione nulla (nel qual caso ogni punto $x_0 \in S^{N-1}$ è tale che $f(x_0) = f(-x_0)$) allora assume sia valori positivi che valori negativi. Dal momento che S^{N-1} è un insieme connesso e g è continua, l'immagine di g è un insieme connesso, cioè un intervallo: dovendo contenere sia valori positivi che valori negativi, anche lo zero vi deve appartenere. Quindi esiste un punto x_0 in cui $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = f(-x_0)$.