Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - \frac{2}{3}xy.$$

sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

☒ 2. Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 - y$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4(x^2 + y^2) \leq 9, \; x + y \geq 0\}.$$

☒ 3. Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x,y,z) = x + y$ sulla superficie sferica di centro l'origine e raggio 1.

☒ 4. Calcolare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = xy$ sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 2|x| \leq 0\}.$$

❑ 5. Calcolare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 3\log(x + y + 1)$$

nel suo insieme naturale di definizione.

☒ 6. Sia $f(x,y) = y(x-1)^2 - y^4$.

a) Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione f.

b) Determinare massimo e minimo assoluti di f sul quadrato di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

☒ 7. Sia $f(x,y) = 2xy - \alpha \sin(x^2 + y^2)$.

a) Verificare che l'origine è punto critico per f e stabilirne la natura (cioè se è punto di minimo, di massimo o di sella) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Porre $\alpha = 2$ e calcolare il massimo ed il minimo di f sull'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq \pi/6\}.$$

☒ 8. Calcolare la distanza

a) del punto $(0,0,1)$ dal paraboloide di equazione $z = x^2 + 2y^2$;

b) dell'origine dal grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.

☒ 9. Un campo è percorso da un canale rettilineo di equazione $y = -x$. Un uomo parte dal punto $A = (0, 1)$, attinge acqua al canale e poi la porta nel punto $B = (2, 1)$. Si trovi il punto P in cui deve essere presa l'acqua in modo che il percorso totale sia minimo.

Si dimostri (moltiplicatori di Lagrange) che il punto P è tale che le rette PA e PB formano angoli uguali con la retta normale al vincolo $x + y = 0$ in P.

☒ 10. Siano A e B due sostanze che costano rispettivamente 11 e 3 euro al litro. Entrambe entrano nella fabbricazione del prodotto C. La quantità di prodotto C ottenuta impiegando x litri di A e y litri di B è $g(x, y) = -3x^2 + 10xy - 3y^2$. Quanti litri di A e di B devono essere utilizzati per produrre 80 litri della sostanza C e minimizzare il costo?

☒ 11. Trovare la minima distanza di un punto dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$ dalla retta $x + y = 4$.

☒ 12. Determinare i punti dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ nei quali la tangente forma con gli assi un triangolo di superficie minima.

☒ 13. La curva di equazione $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ è un'ellisse di centro $(0, 0)$. Determinare la lunghezza dei suoi assi.

☒ 14. Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sulla curva individuata dalle equazioni

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9, \qquad x - 2z = 0.$$

(Geometricamente il problema consiste nel determinare il punto della curva individuata da queste equazioni che si trova più vicino all'origine e quello che si trova più lontano).

☒ 15. Trovare i punti della curva intersezione delle superficie di equazione

$$xy + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

che sono più vicini all'origine.

☒ 16. Sia P_0 un punto della superficie Σ di equazione $g(x, y, z) = 0$, dove g è una funzione dotata di derivate prime continue. Supponiamo che P_0 sia un punto regolare di Σ (cioè $\nabla g(P_0) \neq 0$) in cui la distanza dall'origine è massima o minima. Dimostrare che la retta OP_0 è normale a Σ.

☒ 17. Determinare i valori massimo e minimo assoluti di $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$ su S^{N-1} (data dall'equazione $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2 = 1$).

❑ 18. Calcolare il massimo di $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ sulla superficie Σ di equazione $x^2+y^2+z^2 = c^2$ (c fissato). Dedurne che, dati $a, b, c > 0$, vale la seguente relazione fra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)\,.$$

Soluzioni

1. Osserviamo innanzitutto che gli estremi assoluti esistono per il Teorema di Weierstrass.

Consideriamo dapprima gli eventuali punti critici interni all'insieme A:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - \dfrac{2}{3}y = 0 \\ f_y(x,y) = 10y - \dfrac{2}{3}x = 0. \end{cases}$$

Si ottiene solamente l'origine. Ai fini della determinazione dei punti di estremo assoluto di f non sarebbe necessaria l'indagine se tale punto critico è effettivamente di estremo (si confronta poi il valore che in esso assume f con il valore assunto nei punti stazionari individuati sul bordo di A). Comunque il calcolo della matrice hessiana dà

$$\begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & 10 \end{pmatrix},$$

per cui l'origine è punto di minimo relativo, con valore nullo.

Applichiamo ora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla determinazione dei punti stazionari di f sul bordo di A. Si tratta di risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{2}{3}y = 2\lambda x \\ 10y - \dfrac{2}{3}x = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4\,, \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} 3(\lambda - 1)x + y = 0 \\ x + 3(4\lambda - 5)y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4\,, \end{cases}.$$

Osserviamo che $x = y = 0$ non verifica l'ultima equazione; il sistema delle prime due equazioni (lineare e omogeneo) ha però soluzione non nulla se e solo se il determinante si annulla, cioè

$$\begin{vmatrix} 3(\lambda - 1) & 1 \\ 1 & 3(4\lambda - 5) \end{vmatrix} = 0\,,$$

che dà $\lambda = 4/3$ e $\lambda = 11/12$. Nel primo caso la prima (o, equivalentemente, la seconda) equazione dà $y = -x$:

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + 4y^2 = 4\,, \end{cases}, \qquad \text{da cui} \quad (x,y) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Nel secondo caso, invece, è $y = x/4$ e si ottengono i punti $\pm(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Risulta:

$$f\Big(\pm\big(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\big)\Big) = \frac{16}{3}, \qquad f\Big(\pm\big(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{11}{3}.$$

Allora il minimo assoluto vale 0 (valore di f nel punto critico $(0,0)$), mentre il massimo assoluto è $16/3$.

2. Osserviamo innanzitutto che gli estremi assoluti esistono per il Teorema di Weierstrass.

Il gradiente di f non si annulla mai, per cui non esistono punti critici.

Il bordo di D consta di due tratti delle seguenti curve:

$$\mathscr{C}_1 : 4(x^2+y^2) = 9, \qquad \mathscr{C}_2 : x+y=0.$$

Applichiamo innanzitutto il metodo dei moltiplicatori di Lagrange a $\mathscr{C}_1$ e consideriamo gli eventuali punti stazionari che cadono nel semipiano $x+y \geq 0$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ -1 = 8\lambda y \\ 4(x^2+y^2) = 9\,. \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x(4\lambda - 1) = 0 \\ y = -\dfrac{1}{8\lambda} \\ 4(x^2+y^2) = 9\,. \end{cases}$$

Se $x=0$ allora la terza equazione dà $y = \pm 3/2$ (e λ è fornito dalla seconda equazione), ma solo il punto $(0, 3/2)$ appartiene al semipiano $x+y \geq 0$. Se (dalla prima equazione) $\lambda = 1/4$ allora $y = -1/2$, da cui $x = \pm\sqrt{2}$; si ottengono i punti

$$(\pm\sqrt{2}, -\frac{1}{2}).$$

Di questi solo il punto $(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ sta nel semipiano $x+y \geq 0$.

Alternativamente: il sistema (*) traduce la dipendenza lineare dei vettori

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \end{pmatrix},$$

che può essere anche espressa tramite la richiesta

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 8x \\ -1 & 8y \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $2xy + x = 0$: ancora si ricava $x = 0$ oppure $y = -1/2$.

Su $\mathscr{C}_1$ abbiamo pertanto individuato i punti stazionari

$$(0, \frac{3}{2}), \qquad (\sqrt{2}, -\frac{1}{2}).$$

Utilizziamo ora il metodo dei moltiplicatori per la curva $\mathscr{C}_2$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 \\ -1 = \lambda \cdot 1 \\ x+y = 0. \end{cases}$$

Si ottiene subito $x = -1/2$, quindi $y = 1/2$.

I punti candidati ad essere estremi di f su D sono pertanto i punti stazionari sul bordo:

$$P_1 = (0, \frac{3}{2}), \quad P_2 = (\sqrt{2}, -\frac{1}{2}), \quad P_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

cui si devono aggiungere i punti di intersezione delle due curve $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$:

$$P_4 = (-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}), \quad P_5 = (\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}).$$

Infatti tali punti di intersezione non rientrano tra quelli per i quali è applicabile il metodo dei moltiplicatori (il vincolo non è regolare in tutto un intorno dei punti di intersezione), per cui vanno considerati a parte, confrontando il valore che in essi assume f con il valore negli altri punti stazionari.

Risulta:

$$f(P_1) = -\frac{3}{2}, \quad f(P_2) = \frac{5}{2}, \quad f(P_3) = -\frac{1}{2},$$
$$f(P_4) = \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad f(P_5) = \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Pertanto il valore minimo assoluto è $-\frac{3}{2}$ assunto in P_1, mentre il valore massimo assoluto è $\frac{5}{2}$ assunto in P_2.

Osservazione Per quanto riguarda lo studio di f su $\mathscr{C}_2$ potevamo anche procedere utilizzando la parametrizzazione naturale $y = -x$ e valutando la funzione

$$\varphi(x) = f(x, -x) = x^2 + x \qquad \text{nell'intervallo } -\frac{3}{2\sqrt{2}} \le x \le \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

(l'intervallo è ottenuto intersecando $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$). Si ottiene subito

$$\min \varphi = -\frac{1}{4} = \varphi(-\frac{1}{2}), \qquad \max \varphi = \varphi(\frac{3}{2\sqrt{2}}) = \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

In tal caso, dai candidati a essere punti di estremo assoluto per f su D risultava automaticamente escluso il punto $P_4 = \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ di intersezione delle due curve, in quanto non sarebbe di estremo assoluto nemmeno limitatamente al tratto di curva $\mathscr{C}_2$ compreso nel bordo di D.

3. Gli estremi assoluti esistono per il teorema di Weierstrass. Impostiamo il metodo dei moltiplicatori:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 0 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ricava $z = 0$ (non potendo essere $\lambda = 0$ soluzione delle prime due equazioni). Quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{2\lambda}\,, \\ 2\lambda^2 = 1\,. \end{cases}$$

e si ottiene $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. In tali punti la funzione vale $\pm\sqrt{2}$, quindi $\min f = \sqrt{2}$ e $\max f = \sqrt{2}$. Geometricamente il risultato era prevedibile: le superficie di livello di f sono piani verticali che hanno traccia, sul piano $z = 0$, parallela alla retta $x + y = 0$.

4. L'insieme A è unione dei due cerchi chiusi di centri i punti $(\pm 1, 0)$ e passanti per l'origine. La funzione non presenta punti critici interni al dominio.

Consideriamo dapprima la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, ragionando poi per simmetria.

$$(*) \qquad \begin{cases} y = \lambda(2x - 2) \\ x = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni traducono il parallelismo fra il gradiente di f e il gradiente della funzione $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ che esprime il vincolo:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y, \end{cases}$$

cioè la dipendenza lineare fra i due vettori ∇f e ∇g. Equivalentemente possiamo allora richiedere che la seguente matrice 2:

$$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix},$$

abbia determinante nullo: $f_x g_y - f_y g_x = 0$. Nel caso specifico ciò diventa

$$2y^2 - 2x(x - 1) = 0, \qquad \text{cioè} \qquad y^2 - x(x - 1) = 0.$$

Dall'equazione del vincolo ricaviamo allora $x = 0$ e $x = 3/2$, quindi i punti:

$$(0, 0), \quad (\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Alternativamente, per la risoluzione del sistema $(*)$, dalle prime due equazioni possiamo ricavare x e y in funzione di λ:

$$\begin{cases} x = 2\lambda y \\ 4\lambda^2 y - y - 2\lambda = 0, \end{cases} \qquad \text{quindi} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4\lambda^2}{4\lambda^2 - 1} \\ y = \dfrac{2\lambda}{4\lambda^2 - 1} \end{cases}$$

Utilizziamo ora l'equazione del vincolo:

$$\frac{16\lambda^4}{(4\lambda^2 - 1)^2} + \frac{4\lambda^2}{(4\lambda^2 - 1)^2} - \frac{8\lambda^2}{4\lambda^2 - 1} = 0,$$

da cui

$$\lambda^2(-4\lambda^2 + 3) = 0.$$

La soluzione $\lambda = 0$ dà $x = y = 0$, mentre $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$ danno i punti $(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Alternativamente si può parametrizzare la circonferenza come $\varrho = 2\cos\vartheta$, quindi

$$\begin{cases} x = 2\cos^2\vartheta \\ \\ y = 2\cos\vartheta\sin\vartheta. \end{cases} \qquad \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Si studia allora la funzione $g(\vartheta) = 4\cos^3\vartheta\sin\vartheta$ (che esprime f in coordinate polari) sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. La derivata si annulla per

$$\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \vartheta = \pm\frac{\pi}{6},$$

che corrispondono ai punti precedentemente individuati.

Risulta

$$f(0,0) = 0, \qquad f(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Tenendo conto della simmetria del dominio e della funzione concludiamo che $\pm(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ sono punti di massimo assoluto, mentre $\pm(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ sono punti di minimo assoluto.

5. La funzione è definita sul semipiano E dato da $x + y + 1 > 0$. I punti critici soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - \dfrac{3}{x+y+1} \\[2ex] f_y(x,y) = 6y - \dfrac{3}{x+y+1}. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene $x = 3y$, da cui si ricavano poi le soluzioni

$$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), \qquad (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Tuttavia il secondo punto sta al di fuori dell'insieme di definizione di f.

La matrice hessiana in $(3/4, 1/4)$ è

$$H(3/4,1/4) = \begin{pmatrix} 11/4 & 3/4 \\ 3/4 & 27/4 \end{pmatrix}, \qquad \det H(3/4,1/4) = 18 > 0, \quad f_{xx} > 0.$$

Pertanto $(3/4, 1/4)$ è punto di minimo relativo, con valore $\frac{3}{4} - 3\log 2$.

La funzione f non ha punti di massimo assoluto poiché altrimenti questi si troverebbero in particolare fra i punti di estremo relativo. Dimostriamo che invece f ha minimo assoluto. Innanzitutto osserviamo che

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to+\infty \\ (x,y)\in E}} f(x,y) = +\infty.$$

Infatti (essendo $\log(t+1) \le t$):

$$\log(x+y+1) \le |x| + |y| \le \sqrt{2}|(x,y)|,$$

quindi

$$f(x,y) \ge x^2 + 3y^2 - 3\sqrt{2}|(x,y)| \ge |(x,y)|^2 - 3\sqrt{2}|(x,y)| \to +\infty$$

per $|(x,y)| \to +\infty$.

Inoltre, se $0 < \gamma < 1$ e S_γ è la striscia $\{(x,y) :\ 0 < x+y+1 < \gamma\}$ allora per $(x,y) \in S_\gamma$

$$f(x,y) \ge -3\log\gamma \to +\infty \qquad \text{per } \gamma \to 0^+.$$

Pertanto, il minimo assoluto (che esiste per il Teorema di Weierstrass) su

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq R^2, \ x + y + 1 \geq \gamma\}$$

per $R > 0$ sufficientemente grande e $\gamma > 0$ sufficientemente piccolo dà il minimo assoluto di f su tutto E, che deve coincidere con il punto $(3/4, 1/4)$ di minimo locale prima individuato.

6. Il sistema di equazioni che fornisce i punti critici è

$$\begin{cases} f_x = 2y(x-1) = 0 \\ f_y = (x-1)^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione solo il punto $(1, 0)$. Il calcolo delle derivate seconde dà $\det H(1, 0) = 0$: non possiamo concludere circa la natura di $(1, 0)$ come punto critico. Proviamo ad analizzare il segno della funzione

$$f(x, y) - f(1, 0), \qquad \text{cioè della funzione} \quad f(x, y) = y\big[(x-1)^2 - y^3\big].$$

Si vede rapidamente che f è negativa nel semipiano $y \leq 0$ (il primo fattore è negativo e il secondo positivo); e, per quanto riguarda il semipiano $y > 0$, al di sopra della curva di equazione $y = |x - 1|^{2/3}$. La distribuzione dei segni così ottenuta permette di concludere che $(1, 0)$ è punto di sella. Alternativamente si poteva osservare che lungo la retta $y = x - 1$ la funzione cambia segno attraversando il punto $(1, 0)$: infatti

$$f(x, x-1) = (x-1)^3(2-x).$$

Infine: la funzione f non può avere punti di massimo o di minimo assoluto perché questi sarebbero anche punti di estremo locale.

b) I punti di estremo assoluto sul quadrato Q si trovano sul bordo, poiché l'unico punto critico di f (peraltro di sella) è $(1, 0)$ che si trova sul bordo di Q. Consideriamo la restrizione di f a ciascun lato separatamente:

$$\begin{aligned}
& f(x,0) = 0; && \\
& f(1,y) = -y^4 : && \min_{0 \leq y \leq 1} f(1,y) = f(1,1) = -1, \\
& && \max_{0 \leq y \leq 1} f(1,y) = f(1,0) = 0; \\
& f(x,1) = 2x^2 - 2x : && \min_{0 \leq x \leq 1} f(x,1) = f(1,1) = -1, \\
& && \max_{0 \leq x \leq 1} f(x,1) = f(0,1) = 0; \\
& f(0,y) = y - y^4 : && \min_{0 \leq y \leq 1} f(0,y) = f(0,0) = f(0,1) = 0, \\
& && \max_{0 \leq y \leq 1} f(0,y) = f\Big(0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Big) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.
\end{aligned}$$

Pertanto $\min_Q f = -1$ e $\max_Q f = 3/(4\sqrt[3]{4})$.

7. Il sistema che fornisce i punti critici è

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2\big(y - \alpha x \cos(x^2+y^2)\big) \\ f_y(x,y) = 2\big(x - \alpha y \cos(x^2+y^2)\big), \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} y = \alpha x \cos(x^2+y^2) \\ x - \alpha^2 x \cos^2(x^2+y^2)\big) = 0. \end{cases}$$

Quindi $x = y = 0$ oppure $\alpha \neq 0$ e

$$\begin{cases} \cos^2(x^2+y^2) = 1/\alpha^2 \\ y = \pm x, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} \cos^2(2x^2) = 1/\alpha^2 \\ y = \pm x. \end{cases}$$

Se $\alpha = 2$, come richiesto nel punto (b) successivo, allora

$$\begin{cases} \cos(2x^2) = \dfrac{1}{2} \\ y = \pm x \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \cos(2x^2) = -\dfrac{1}{2} \\ y = \pm x. \end{cases}$$

Quindi si hanno le seguenti soluzioni (tenendo conto del fatto che deve essere $x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{6}$):

$$\pm(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6}), \qquad \pm(\sqrt{\pi/6}, -\sqrt{\pi/6}).$$

Notiamo che tutti questi punti si trovano sul bordo dell'insieme A di cui al successivo punto (b).

Ritorniamo al problema di determinare la natura dell'origine come punto critico. Calcolando al matrice hessiana si ha

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2\alpha & 2 \\ 2 & -2\alpha \end{pmatrix}, \quad \det H(0,0) = 4(\alpha^2 - 1).$$

Il determinante è negativo per $|\alpha| < 1$: per tali valori l'origine è punto di sella. È invece positivo per $|\alpha| > 1$, per cui

l'origine è punto di minimo se $\alpha < -1$;

l'origine è punto di massimo se $\alpha > 1$.

Rimane da indagare il caso $\alpha = \pm 1$. Osserviamo che, se $\alpha = 1$, per $x \neq 0$ vicino a zero:

$$f(x,0) = -\sin x^2 < 0, \quad f(x,x) = 2x^2 - \sin(2x^2) > 0 : \quad \text{punto di sella.}$$

Invece, se $\alpha = -1$, per $x \neq 0$ vicino a zero:

$$f(x,0) = \sin x^2 > 0, \quad f(x,-x) = -2x^2 + \sin(2x^2) < 0 : \quad \text{punto di sella.}$$

b) Come sopra osservato, se $\alpha = 2$ l'origine è punto di massimo relativo e non vi sono altri punti critici di f interni ad A.

Su $\mathscr{F}A$ la funzione f vale $2xy - 1$ per cui il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dà

$$\begin{cases} 2y = 2\lambda x \\ 2x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{con } r^2 = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Si ottengono i punti
$$\pm(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}),\quad \pm(\frac{r}{\sqrt{2}},-\frac{r}{\sqrt{2}}).$$
I valori di f in tali punti sono
$$f\Big(\pm(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}})\Big)=\frac{\pi}{6}-1<0,\qquad f\Big(\pm(\frac{r}{\sqrt{2}},-\frac{r}{\sqrt{2}})\Big)=-\frac{\pi}{6}-1.$$
Quindi il valore massimo di f su A è 0, mentre il valore minimo è $-\frac{\pi}{6}-1$.

8. Sappiamo che esiste il punto di minima distanza di un dato punto da un chiuso.

a) Equivalentemente determiniamo il punto del paraboloide che minimizza la distanza al quadrato dal punto $(0,0,1)$:
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2.$$
Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dà il sistema
$$\begin{cases}2x=2\lambda x\\2y=4\lambda y\\2(z-1)=\lambda(-1)\\x^2+2y^2=z\end{cases}\quad\text{cioè}\quad\begin{cases}x(1-\lambda)=0\\y(1-2\lambda)=0\\2(z-1)+\lambda=0\\x^2+2y^2=z.\end{cases}$$
La prima equazione dà $x=0$ oppure $\lambda=1$ e la seconda $y=0$ o $\lambda=\frac{1}{2}$. Allora

- se $x=0$ e $y=0$ l'equazione del vincolo porta $z=0$, cioè il punto $O=(0,0,0)$;
- se $x=0$ e $\lambda=\frac{1}{2}$ la terza equazione fornisce $z=\frac{3}{4}$, da cui $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$:
$$P=(0,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{4}),\qquad Q=(0,-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{3}{4}).$$
- se $\lambda=1$ allora $y=0$ e dalla terza equazione ricaviamo $z=\frac{1}{2}$, da cui $x=\pm1/\sqrt{2}$.
$$R=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2}),\qquad S=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{2}).$$

Nei punti così individuati la funzione assume i valori
$$F(O)=1,\quad f(P)=f(Q)=\frac{7}{16},\quad f(R)=f(S)=\frac{3}{4}.$$
Concludiamo che P e Q sono i punti di minima distanza; la minima distanza è $\sqrt{7}/4$.

Osservazione Si cerchi di visualizzare il problema geometricamente; ciò può portare direttamente a considerare la sola sezione del paraboloide con il piano $x=0$.

b) Anche in questo caso consideriamo la distanza al quadrato:
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

con il vincolo $z - \frac{1}{xy} = 0$. Il sistema dei moltiplicatori diventa

$$\begin{cases} 2x = \lambda \dfrac{1}{x^2 y} \\ 2y = \lambda \dfrac{1}{xy^2} \\ 2z = \lambda \\ z - \dfrac{1}{xy} = 0 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le prime due equazioni si ottiene $y = x$ oppure $y = -x$, quindi i due sistemi, rispettivamente,

$$\begin{cases} x^4 = \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \dfrac{1}{x^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^4 = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = -\dfrac{1}{x^2}, \end{cases}$$

Si ottengono pertanto i punti

$$(1, 1, 1), \quad (-1, -1, 1), \quad (1, -1, -1), \quad (-1, 1, -1).$$

In tutti questi punti f vale 3. Quindi vi sono quattro punti di minima distanza, uno per ciascuno dei quattro quadranti del piano xy; il valore della distanza minima è $\sqrt{3}$.

9. Sia $P = (x, y) = (x, -x)$ il generico punto della retta r di equazione $y = -x$. La somma delle distanze di P da A e B è

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2},$$

cioè, esprimendo y come $-x$ (il che corrisponde all'aver parametrizzato il vincolo)

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (x+1)^2}.$$

L'equazione $\varphi'(x) = 0$ diventa

$$\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = \frac{1-2x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}.$$

Possiamo elevare a quadrato entrambi i membri con la condizione che $2x + 1$ e $1 - 2x$ siano concordi, cioè $|x| \le \frac{1}{2}$.

Svolgendo i calcoli si arriva all'equazione $4x^2 + 5x + 1 = 0$ che dà $x = -1$ e $x = -\frac{1}{4}$: solo quest'ultima è accettabile.

Consideriamo ora, in generale, il caso di punti $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e la funzione che dà la somma delle distanze di A e B dal generico punto $P = (x, y)$ di una curva $\mathscr{C}$ di equazione di $g(x, y) = 0$:

$$\varphi(x, y) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} + \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2},$$

cioè

$$\varphi(P) = |P - A| + |P - B|.$$

Allora
$$\nabla\varphi(P) = \frac{P-A}{|P-A|} + \frac{P-B}{|P-B|}.$$
Osserviamo ora che risulta
$$\nabla\varphi(P)\cdot\frac{P-A}{|P-A|} = 1 + \frac{P-A}{|P-A|}\cdot\frac{P-B}{|P-B|} = \nabla\varphi(P)\cdot\frac{P-B}{|P-B|}.$$
Quindi il gradiente di φ forma angoli uguali con le rette PA e PB.

Del resto, se P è soluzione del problema di minimo
$$\min_{P\in\mathscr{C}} \varphi(P),$$
il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange dà il parallelismo fra $\nabla\varphi(P)$ e $\nabla g(P)$; poiché quest'ultimo vettore è normale alla curva stessa, concludiamo che le rette PA e PB formano angoli uguali con la retta normale a $\mathscr{C}$ in P.

10. Il problema posto equivale a minimizzare la funzione
$$f(x,y) = 11x + 3y$$
con il vincolo
$$-3x^2 + 10xy - 3y^2 = 80,$$
e tenendo conto che $x, y \geq 0$. Impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange
$$\begin{cases} 11 = \lambda(-6x + 10y) \\ 3 = \lambda(10x - 6y) \\ -3x^2 + 10xy - 3y^2 = 80. \end{cases}$$
Possiamo considerare le prime due equazioni come la richiesta che il seguente determinante sia nullo
$$\begin{vmatrix} 11 & -6x + 10y \\ 3 & 10x - 6y \end{vmatrix}.$$
Quindi, svolgendo i calcoli, $y = \frac{4}{3}x$. Dall'equazione del vincolo si ricava pertanto $x = \pm 4$. Abbiamo quindi la soluzione
$$x = 4, \qquad y = \frac{16}{3}.$$
Si noti che la condizione $x, y \geq 0$ non produce sulla curva $-3x^2+10xy-3y^2 = 80$ alcun punto per il quale non sia possibile applicare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (come invece succede, ad esempio, nell'Esercizio 2, con la condizione $x + y \geq 0$ per quanto riguarda la curva $4(x^2 + y^2) = 9$); infatti tale curva non contiene alcun punto del tipo $(x, 0)$ o $(0, y)$.

Osservazione (Esistenza) Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto della curva $\mathscr{C}$ rappresentata dal vincolo $-3x^2 + 10xy - 3y^2 = 80$ (si dimostra essere un'iperbole). Sia V_0 il valore di f in P_0, cioè $V_0 = 11x_0 + 3y_0$. Allora per (x, y) al di fuori del quadrato $R = [0, V_0/11] \times [0, V_0/3]$ risulta $f(x, y) \geq V_0$, per cui il minimo di f può essere ricercato in R. In tale insieme si applica il Teorema di Weierstrass.

11. Come subito si verifica, la retta non interseca l'ellisse. Minimizziamo la distanza al quadrato fra i punti

$$\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1) & \text{tale che} & x_1 + y_1 = 4 \\ \text{e} & & \\ P_2(x_2, y_2) & \text{tale che} & x_2^2 + 4y_2^2 = 1. \end{array}$$

Possiamo eliminare una variabile utilizzando il primo vincolo: $y_1 = 4 - x_1$. Consideriamo allora la funzione

$$f(x_1, x_2, y_2) = \big(d(P_1, P_2)\big)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (4 - x_1 - y_2)^2.$$

con il vincolo

$$x_2^2 + 4y_2^2 = 1.$$

Impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_2) - 2(4 - x_1 - y_2) = 0 \\ -2(x_1 - x_2) = 2\lambda x_2 \\ -2(4 - x_1 - y_2) = 8\lambda y_2 \\ x_2^2 + 4y_2^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - (4 - x_1 - y_2) = 0 \\ x_1 - x_2 = -\lambda x_2 \\ 4 - x_1 - y_2 = -4\lambda y_2 \\ x_2^2 + 4y_2^2 = 1. \end{cases}$$

Sommando la terza equazione alla prima si ha $x_1 - x_2 = -4\lambda y_2$; quindi dalla seconda:

$$(*) \qquad \lambda(x_2 - 4y_2) = 0.$$

Se $\lambda = 0$ allora

$$x_1 = x_2 \qquad \text{e} \qquad 4 - x_1 - y_2 = 0, \quad \text{cioè} \quad x_2 + y_2 = 4.$$

Quest'ultima equazione è incompatibile con $x_2^2 + 4y_2^2 = 1$ (retta ed ellisse hanno intersezione vuota).

Altrimenti dalla $(*)$ abbiamo $x_2 = 4y_2$; in tal caso l'equazione dell'ellisse dà

$$16y_2^2 + 4y_2^2 = 1, \quad \text{cioè} \quad y_2 = \pm\frac{1}{2\sqrt{5}},$$

da cui

$$(x_2, y_2) = \pm\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big)$$

Il valore di x_1 lo si può ora ricavare dalla prima equazione:

$$x_1 = 2 \pm \frac{3}{4\sqrt{5}}.$$

Abbiamo quindi ottenuto i punti

$$P_{1,2} = \Big(2 \pm \frac{3}{4\sqrt{5}}, 2 \mp \frac{3}{4\sqrt{5}}\Big), \qquad Q_{1,2} = \Big(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\Big)$$

(i segni vanno considerati ordinatamente). Valutiamo la distanza nei due casi:

$$d^2(P_1, Q_1) = 2\Big(2 - \frac{\sqrt{5}}{4}\Big)^2, \qquad d^2(P_2, Q_2) = 2\Big(2 + \frac{\sqrt{5}}{4}\Big)^2$$

La prima coppia fornisce i punti di minima distanza. La seconda fornisce un massimo locale (come geometricamente intuibile).

12. Indichiamo con $P_0 = (x_0, y_0)$ il punto di tangenza, che possiamo supporre nel primo quadrante. La retta tangente ha equazione

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

(dalla formula per la tangente alla curva di equazione $g(x, y) = 0$). Intersecando con gli assi otteniamo i punti

$$A = \big(x_0 + \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0^2}{x_0}, 0\big), \qquad B = \big(0, y_0 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0}\big).$$

L'area del triangolo OAB, tenendo conto della relazione $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, diventa:

$$\text{area } OAB = \frac{1}{2}\frac{a^2 b^2}{x_0 y_0}.$$

Cerchiamo pertanto il punto di minimo della funzione $f(x, y) = 1/xy$ sull'ellisse, con $x, y > 0$. Impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2 y} = \lambda \dfrac{2x}{a^2} \\ -\dfrac{1}{xy^2} = \lambda \dfrac{2y}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Dividendo membro a membro le prime due equazioni otteniamo $\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$, da cui $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Si ottiene pertanto il punto dell'ellisse, nel primo quadrante, che sta sulla retta di equazione $y = \frac{b}{a}x$.

13. Cerchiamo i punti (x, y) della curva per i quali la distanza dall'origine (o, equivalentemente, il quadrato $x^2 + y^2$ della distanza) è minima o massima. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce:

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x + 8y) \\ 2y = \lambda(8x + 10y) \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9. \end{cases}$$

Le prime due equazioni equivalgono alla richiesta che la seguente matrice abbia determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} x & 5x + 4y \\ y & 4x + 5y \end{pmatrix};$$

quindi, svolgendo i calcoli: $x^2 - y^2 = 0$, cioè $y = \pm x$. Inserendo nell'equazione dell'ellisse si ottengono i punti:

$$\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \qquad \pm\Big(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\Big).$$

14. Osserviamo che la curva è chiusa e limitata (è contenuta nella superficie sferica data dal primo vincolo), quindi il problema di massimo/minimo ha soluzione per il teorema di Weierstrass.

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda(x-1) + \mu \\ 2y = 2\lambda(y-1) \\ 2z = 2\lambda(z-3) - 2\mu \\ x - 2z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9. \end{cases} \tag{1}$$

Le prime tre equazioni danno

$$\begin{cases} 2(\lambda-1)x = 2\lambda - \mu \\ (\lambda-1)y = \lambda \\ (\lambda-1)z = 3\lambda + \mu. \end{cases}$$

Dalla seconda segue che $\lambda \neq 1$, per cui

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\lambda - \mu}{2(\lambda-1)} \\ y = \dfrac{\lambda}{\lambda-1} \\ z = \dfrac{3\lambda+\mu}{\lambda-1}. \end{cases}$$

Se imponiamo ora che sia soddisfatta l'equazione $x - 2z = 0$ otteniamo rapidamente $\mu = -2\lambda$, da cui

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\lambda}{\lambda-1} \\ y = \dfrac{\lambda}{\lambda-1} \\ z = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}. \end{cases}$$

Inseriamo ora tali valori nell'ultima delle equazioni in (1); si ottiene un'equazione di secondo grado in λ che dà

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

In corrispondenza a tali valori si hanno i punti

$$(2z, z, z), \quad \text{con } z = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3},$$

che danno, per la funzione f, i valori $10 \pm 4\sqrt{6}$.

Si noti che, utilizzando l'equazione $x = 2z$ nell'espressione della funzione f e dell'altro vincolo, il problema poteva essere ridotto allo studio degli estremi di una funzione di due variabili con un solo vincolo.

15. Cerchiamo il minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sulla curva data, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 2x = \lambda y + \mu(2x) \\ 2y = \lambda x + \mu(2y) \\ 2z = \lambda(2z) \\ xy + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo $z = 0$ oppure $\lambda = 1$. Nel primo caso le equazioni del vincolo danno $x = 0$ o $y = 0$ quindi i punti:

$$(0, \pm 1, 0), \qquad (\pm 1, 0, 0).$$

Se invece $\lambda = 1$ le prime due equazioni del sistema diventano:

$$(*) \qquad \begin{cases} 2(1-\mu)x - y = 0 \\ x + 2(\mu - 1)y = 0. \end{cases}$$

Il determinante del sistema deve essere nullo (la soluzione $x = y = 0$ non verifica il secondo vincolo), cioè

$$4\mu^2 - 8\mu + 3 = 0.$$

Le soluzioni sono $\mu = \frac{3}{2}$ e $\mu = \frac{1}{2}$. Nel primo caso le equazioni del sistema $(*)$ diventano $x + y = 0$; questa relazione, assieme alle equazioni della curva, danno

$$|x| = |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si hanno quindi i quattro punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Se invece $\mu = \frac{1}{2}$ dal sistema $(*)$ si ottiene $x - y = 0$: questa relazione è incompatibile con le equazioni della curva.

Calcoliamo il valore di f nei punti individuati:

$$f(0, \pm 1, 0) = f(\pm 1, 0, 0)) = 1,$$
$$f((\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}.$$

Concludiamo che $(0, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, 0, 0)$ sono i punti di minima distanza.

16. Sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ un punto che rende massima o minima la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

fra i punti di Σ. Poiché P_0 è regolare, il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange assicura che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(P_0) = \lambda g(P_0).$$

Questa relazione si traduce in

$$\begin{cases} 2x_0 = \lambda g_x(P_0) \\ 2y_0 = \lambda g_y(P_0) \\ 2z_0 = \lambda g_z(P_0), \end{cases}$$

il che significa che la direzione OP_0 è parallela a $\nabla g(P_0)$, quindi ortogonale a Σ in P_0.

17. Posto $g(x) = |x|^2 - 1$ (con $x \in \mathbb{R}^N$), si ha

$$\nabla f(x) = (1, 1, \ldots, 1), \qquad \nabla g(x) = 2x.$$

In base al Teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo o minimo di f su S^{N-1} soddisfano l'uguaglianza

$$1 = 2\lambda x_i, \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

per un opportuno λ. La condizione $|x|^2 = 1$ dà

$$N \frac{1}{4\lambda^2} = 1,$$

cioè $\lambda = \pm\sqrt{N}/2$. Si ottengono pertanto i punti

$$\pm\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}}\Big).$$

18. L'usuale metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce

$$\begin{cases} 2xy^2z^2 = 2\lambda x \\ 2x^2yz^2 = 2\lambda y \\ 2x^2y^2z = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2. \end{cases} \tag{1}$$

La prima equazione ammette la soluzione $x = 0$ che implica

$$\begin{cases} 0 = \lambda y \\ 0 = \lambda z \\ y^2 + z^2 = c^2. \end{cases} \tag{2}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema è soddisfatto da tutti i punti del cerchio massimo della superficie sferica Σ che si ottiene per sezione con il piano $x = 0$. Invece, per $\lambda \neq 0$ il sistema (2) non ha soluzione.

In modo analogo, il sistema (1) è soddisfatto dai punti dei cerchi massimi ottenuti per sezione di Σ con il piano $y = 0$ o con il piano $z = 0$.

Supponiamo ora che nessuna delle variabili si annulli. Allora la prima equazione del sistema (1) dà $\lambda = y^2z^2$, quindi la seconda e la terza equazione diventano

$$\begin{cases} x^2yz^2 = y^3z^2 \\ x^2y^2z = y^2z^3. \end{cases}$$

Poiché nessuna delle variabili si annulla, ciò equivale a

$$x^2 = y^2 = z^2,$$

per cui si ottengono i punti (x, y, z) tali che

$$|x| = |y| = |z| = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Concludiamo che

$$\max_{x^2+y^2+z^2=c^2} (x^2 y^2 z^2) = \frac{c^6}{27}.$$

Questo risultato permette di dedurre che, preso comunque un elemento non nullo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e posto $c^2 = x^2 + y^2 + z^2$, si ha:

$$x^2 y^2 z^2 \le \big(\frac{c^2}{3}\big)^2 = \Big(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\Big)^3,$$

cioè

$$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \le \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2),$$

od anche, comunque presi $a, b, c > 0$:

$$\sqrt[3]{a, b, c} \le \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Osservazione Si poteva procedere in modo equivalente considerando la funzione $f(x, y, z) = xyz$ sul piano $x + y + z = c$.