Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Sia $\mathscr{C}$ un arco di curva di equazione polare

$$\varrho = \varrho(\vartheta), \qquad \vartheta \in [\alpha, \beta],$$

dove α e β sono valori fissati. Dimostrare che la lunghezza di $\mathscr{C}$ è data da

$$L(\mathscr{C}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho(\vartheta)^2 + \varrho'(\vartheta)}\, \mathrm{d}\vartheta.$$

☒ 2. Calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_\gamma (x+z)\, ds\,,$ $\qquad \gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}} t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$ $\qquad$ [R. $\frac{56\sqrt{7}-1}{54}$]

b) $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} (x+y)\, ds\,,$ dove $\mathscr{C}$ è la parte della curva $\rho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$ nel semipiano $x \ge 0$ esterna alla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2/2$. [R. a^2]

☒ 3. Calcolare $\int_\gamma (x+y+3)\, dx - 2y^2\, dy$, dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 orientata in senso orario.

☒ 4. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove:

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{2x^2 + y^2 + z^2}(8x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)\,, \quad \gamma : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t^2 \end{cases} \quad 1 \le t \le 2.$$

☒ 5. Calcolare $\int_{\mathscr{C}} xy\, dx + yz\, dy + zx\, dz$ dove $\mathscr{C}$ è l'arco della circonferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx \\ z = x \end{cases}$$

che sta nel semispazio $y \ge 0$ ed ha come primo estremo l'origine. $\left[R^3\left(\frac{1}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)\right]$

☒ 6. Sia $\omega = 2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y$. Si considerino i seguenti archi di curva, orientati dal punto $O = (0,0)$ al punto $A = (2,1)$:

γ_1, data dal segmento OA;

γ_2, data dall'arco di parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$ fra O e A;

γ_3, data dalla poligonale di vertici i punti O, Q e A, dove $Q = (2,0)$.

Si svolga l'integrazione anche nel caso in cui ω sia la forma differenziale $\omega = 2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$. Quest'ultimo risultato era prevedibile?

☒ 7. Dire se i seguenti campi vettoriali sono conservativi e, in caso affermativo, calcolarne una funzione potenziale:

a) $\mathbf{F}(x,y) = (1 + ye^{xy}, xe^{xy} + \cos y)$ in $\mathbb{R}^2$;

b) $\mathbf{F}(x,y) = (ye^x, e^x - \cos y)$ in $\mathbb{R}^2$;

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\sin z, x\sin z, xy\cos z)$ in $\mathbb{R}^3$.

☒ 8. Calcolare

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dy\,,$$

dove $\mathscr{C}$ è il quarto dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ nel primo quadrante percorsa in senso orario.

☒ 9. Calcolare

$$\int_\gamma x^2y\,\mathrm{d}x + (x^3+y^3)\,\mathrm{d}y,$$

dove γ è l'ellisse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ percorsa in senso antiorario.

☒ 10. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{2x-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

dove γ è l'ellisse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ percorsa in senso antiorario.

☒ 11. Sia $a > 0$. Calcolare

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\mathscr{C}_\alpha} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s,$$

dove $\mathscr{C}_\alpha$ è l'arco della spirale logaritmica $\varrho = ae^\vartheta$ corrispondente all'intervallo $\vartheta \in [\alpha, 0]$. [R. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$]

☒ 12. Calcolare la lunghezza delle curve di livello della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

[8*C*]

☒ 13. Si consideri nel piano $z = 0$ l'arco $\mathscr{C}_0$ di equazione polare

$$\varrho = e^\vartheta, \qquad \vartheta_0 \le \vartheta \le \vartheta_1,$$

con $\vartheta_0 < \vartheta_1$ valori assegnati. Sia

$$\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in \mathscr{C}_0,\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2+y^2)^\alpha\},$$

dove $\alpha > 0$ è dato. Calcolare la lunghezza di $\mathscr{C}$ nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ e nel caso $\alpha = 1$.

☒ 14. Sia
$$\omega(x,y) = \frac{y^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x - \frac{x^2+xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y.$$

a) Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di circonferenza di centro l'origine e raggio 1 avente come primo estremo il punto $P=(0,1)$ e come secondo estremo il punto $Q=(1,0)$.

b) Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola di equazione $y=1-x^2$ avente come primo estremo il punto P e come secondo estremo il punto Q.

☒ 15. Determinare una funzione u derivabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$ e tale che la forma differenziale
$$\omega(x,y,z) = (z+yu(x))\,\mathrm{d}x + (\log z + u(x))\,\mathrm{d}y + (\frac{y}{z}+x)\,\mathrm{d}z$$
sia esatta nel semispazio $z>0$. In corrispondenza alla funzione u così determinata, individuare una funzione primitiva.

☒ 16. Sia dato il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(4xz, 2\frac{\sqrt{1-z^2}}{y^3}, 2x^2 + \frac{z}{y^2\sqrt{1-z^2}}\Big).$$
Dire se $\mathbf{F}$ è conservativo nell'insieme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ |z|<1,\ y>0\}$, e in caso affermativo calcolarne una funzione potenziale.

☒ 17. Sia
$$\omega(x,y) = (\frac{1}{2}\log(2y+x^2) + \frac{x^2}{2y+x^2})\mathrm{d}x + (\frac{\alpha x}{2y+x^2} - y)\mathrm{d}y,$$
dove α è un fissato valore reale.

a) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è l'arco di curva di equazione $2y+x^2=1$ di primo estremo $A=(0,\frac{1}{2})$ e secondo estremo $B=(2,-\frac{3}{2})$.

b) Determinare i valori α per i quali la forma differenziale ω è esatta. In corrispondenza di tali valori determinare una primitiva.

❑ 18. Sia $\omega = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y$ una forma differenziale di classe C^1 su un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^2$ (A e B funzioni C^1). Supponiamo che ω sia chiusa (cioè soddisfi le condizioni necessarie di esattezza) e che Ω sia stellato, ad esempio rispetto all'origine. Per ogni punto $(x,y)\in\Omega$ si definisca la funzione
$$f(x,y) = \int_{S_{(x,y)}} \omega,$$
dove $S_{(x,y)}$ è il segmento che unisce l'origine al punto (x,y). Verificare che $\omega = \mathrm{d}f$ calcolando direttamente le derivate parziali di f (si utilizzino i risultati relativi alla derivazione sotto il segno di integrale).

1. $\mathscr{C}: \quad \rho = \rho(\vartheta) \quad , \quad \alpha \leq \vartheta \leq \beta$

In coordinate cartesiane:

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \alpha \leq \vartheta \leq \beta .$$

Allora:

$$x'(\vartheta)^2 = (\rho'\cos\vartheta - \rho\operatorname{sen}\vartheta)^2 = \rho'^2\cos^2\vartheta - 2\rho\rho'\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta$$

$$y'(\vartheta)^2 = (\rho'\operatorname{sin}\vartheta + \rho\cos\vartheta)^2 = \rho'^2\operatorname{sen}^2\vartheta + 2\rho\rho'\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta$$

e

$$ds = \sqrt{x'(\vartheta)^2 + y'(\vartheta)^2}\, d\vartheta = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\vartheta .$$

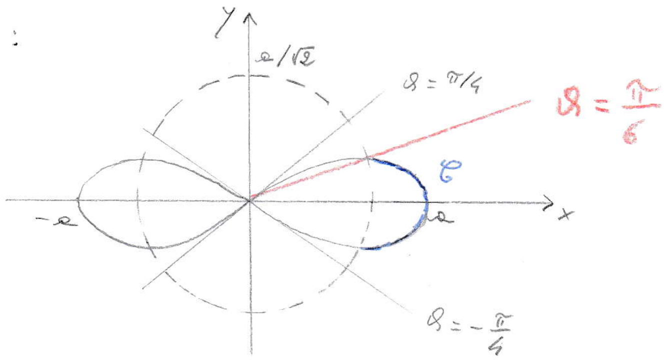
2. a) $\displaystyle\int_\gamma (x+z)\,ds$, $\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ $0 \le t \le 1$

$$\int_0^1 (t+t^3)\left(1 + (3\sqrt{2}\,t)^2 + (3t^2)^2\right)^{1/2} dt =$$

$$= \int_0^1 (t+t^3)\cdot\left(1 + 18t^2 + 9t^4\right)^{1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{36}\,\frac{2}{3}\left[\left(1+18t^2+9t^4\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{54}\left(28^{3/2} - 1\right) = \frac{56\sqrt{7}-1}{54}$$

b) $\mathscr{C}$ è un arco di lemniscata:



$\cos 2\vartheta \ge 0$

per $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

(e $\vartheta \in \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$)

Intersechiamo $\mathscr{C}$ con la circonferenza di equazione $\rho = a/\sqrt{2}$:

$\begin{cases} \rho^2 = a^2 \cos 2\vartheta \\ \rho = a/\sqrt{2} \end{cases}$ $\qquad \frac{a^2}{2} = a^2 \cos 2\vartheta \qquad \cos 2\vartheta = \frac{1}{2}$

quindi $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.

Una rappresentazione parametrica della curva $\mathscr{C}$ è data da

$\begin{cases} x = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}$, con $\rho(\vartheta) = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$

Per simmetria:

$\displaystyle\int_{\mathscr{C}} y\,ds = 0$, $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} x\,ds = 2\int_{\mathscr{C}\cap\{y\ge 0\}} x\,ds.$

Come abbiamo visto, se l'arco di curva è dato, in coordinate polari, dall'equazione $\rho=\rho(\vartheta)$, allora l'elemento di lunghezza è dato da

$$ds = \sqrt{\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2}\, d\vartheta .$$

Nel nostro caso

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\vartheta}\,,$$

quindi

$$\rho'(\vartheta) = a\,\frac{1}{2\sqrt{\cos 2\vartheta}}\cdot(-\sin 2\vartheta)\cdot 2 = -\frac{a\sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}$$

$$ds = a\left(\cos 2\vartheta + \frac{\sin^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}\right)^{1/2} d\vartheta$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}\, d\vartheta .$$

Allora

$$\int_{\mathscr{C}} x\, ds = 2\int_0^{\pi/6} \rho(\vartheta)\cos\vartheta\, \frac{a}{\sqrt{\cos 2\vartheta}}\, d\vartheta = 2a^2\int_0^{\pi/6} \cos\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= 2a^2\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/6} = a^2.$$

3. $\int_\gamma (x+y+3)\,dx - 2y^2\,dy$, γ : circonferenza di centro l'origine e raggio 1 orientata in senso orario.

Poiché l'usuale rappresentazione parametrica della circonferenza, cioè

$$\eta : \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

dà luogo all'orientamento in senso antiorario, risulta $\eta = -\gamma$, quindi

$$\int_\gamma \omega = -\int_\eta \omega .$$

Allora l'integrale richiesto vale

$$-\int_0^{2\pi} \left[(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta + 3)(-\operatorname{sen}\vartheta) - 2\operatorname{sen}^2\vartheta \cos\vartheta \right] d\vartheta =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos^2\vartheta\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\vartheta\, d\vartheta - 3\left[\cos\vartheta\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{3}\left[\sin^3\vartheta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 2\vartheta\right]_0^{2\pi}\right) =$$

$$= \pi .$$

Del resto:

$$\omega = \underbrace{\left((x+3)\,dx - 2y^2\,dy\right)}_{\tilde\omega} + y\,dx$$

La forma $\tilde\omega$ è esatta su $\mathbb{R}^2$ (è chiusa e $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso) per cui

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \tilde\omega + \int_\gamma y\,dx = \int_\gamma y\,dx$$

poiché $\int_\gamma \tilde\omega = 0$ in quanto γ è ~~è~~ una curva chiusa.

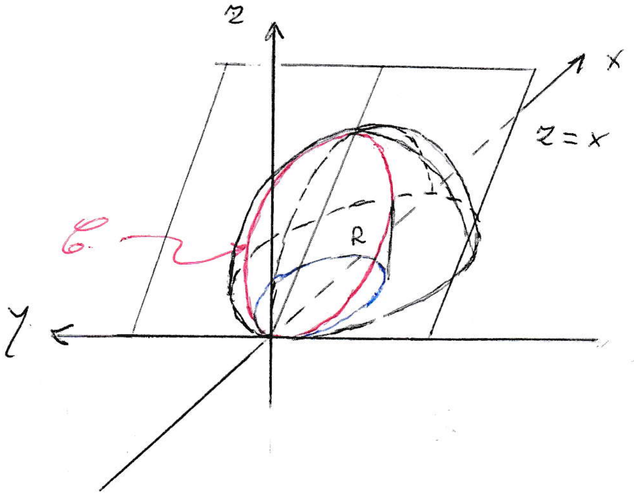
4. Applichiamo direttamente la formula di calcolo:

$$\int_\gamma \omega = \int_1^2 \frac{1}{2t^2+4t^2+t^4} \cdot (8t + 2t \cdot 2 + t^2 \cdot 2t)\, dt =$$

$$= \int_1^2 \frac{12t+2t^3}{t^2(6+t^2)}\, dt = \int_1^2 \frac{2t(6+t^2)}{t^2(6+t^2)}\, dt =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = 2\left[\log t\right]_1^2 = 2\log 2.$$

5.



La proiezione di $\mathscr{C}$ sul piano xy è data da

$$2x^2+y^2=2Rx \qquad (y\geq 0)$$

$$x^2-Rx+\frac{y^2}{2}=0$$

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\frac{y^2}{2}=\frac{R^2}{4} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{(x-R/2)^2}{R^2/4}+\frac{y^2}{R^2/2}=1 .$$

Si ottiene un'ellisse di semiassi $R/2$ e $R/\sqrt{2}$. Questa può essere parametrizzata come:

$$\begin{cases} x=\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2} \\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \qquad 0\leq t\leq \pi \qquad (y\geq 0)$$

Allora la funzione

$$\gamma: \begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t \\ z=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos t \end{cases} \qquad 0\leq t\leq \pi$$

parametrizza la curva nel verso opposto a quello voluto, così che

$$\int_{\mathscr{C}}\omega=-\int_{\gamma}\omega .$$

Allora

$$\int_{\mathscr{C}} \omega = \int_{\pi}^{0} \Big[\frac{R^2}{2\sqrt{2}} (1+\cos t)\sin t \left(-\frac{R}{2}\sin t\right) +$$

$$+ \frac{R^2}{2\sqrt{2}} (1+\cos t)\sin t \,\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t \,+$$

$$+ \frac{R^2}{4}(1+\cos t)^2 \left(-\frac{R}{2}\sin t\right)\Big]\, dt$$

$$= \frac{R^3}{4} \int_{\pi}^{0} \Big[-\frac{1}{\sqrt{2}} (1+\cos t)\sin^2 t + (1+\cos t)\sin t\cos t \,+$$

$$-\frac{1}{2}(1+\cos t)^2 \sin t \Big]\, dt$$

$$= \frac{R^3}{4}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{3}\left[\sin^3 t\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin^2 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi}^{0} +$$

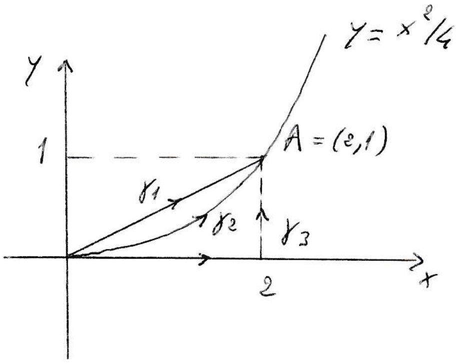
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left[(1+\cos t)^3\right]_{\pi}^{0} \Bigg) =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot 8 \right) =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi}\right) - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) =$$

$$= \frac{R^3}{4}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\right) = R^3\left(\frac{\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\right).$$

6.



$$\omega = 2xy\,dx - x^2\,dy$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1, \qquad \int_{\gamma_1} \omega = \int_0^1 (4t^2 \cdot 2 - 4t^2)\,dt =$$

$$= 4 \int_0^1 t^2\,dt = \frac{4}{3}.$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2 \qquad \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2 \cdot \frac{1}{2}t\right) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^2 2t \cdot 0\,dt + \int_0^1 (-2^2)\,dt = -4.$$

Se invece

$$\omega = 2xy\,dx + x^2\,dy$$

allora ω è esatta: $\quad \omega = df \quad$ con $f(x,y) = x^2 y$. Allora

$$\int_{\gamma_i} \omega = f(A) - f(0) = 4$$

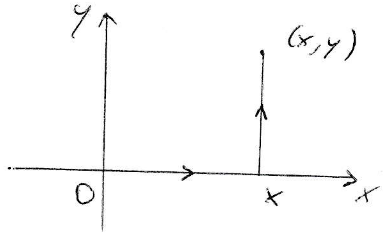
qualunque sia il percorso γ_i fra O e A.

7. In (a), (b) e (c) i campi vettoriali sono definiti su tutto $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso. La verifica se si tratta di campi conservativi equivale pertanto alla verifica delle condizioni necessarie di esattezza delle corrispondenti forme differenziali. Analogamente nel caso (d), su $\mathbb{R}^3$.

a) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(1+ye^{xy}\right) = e^{xy}+xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}+\cos y\right) = e^{xy}+xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}.$$

Allora $\underline{F}$ è conservativo. Calcoliamo una funzione potenziale integrando lungo la poligonale:



$$f(x,y) = \int_0^x \left(1+ye^{xy}\right)\Big|_{\substack{x=t\\ y=0}} dt + \int_0^y \left(xe^{xy}+\cos y\right)\Big|_{y=t} dt$$

$$= x + \left[e^{tx}+\sin t\right]_{t=0}^{t=y} =$$

$$= x+e^{xy}+\sin y - 1.$$

Si tratta della primitiva che in $(0,0)$ vale 0.

Alternativamente, risolviamo le equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1+ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}+\cos y.$$

Integrando la prima ad y fissato si ha

$$f(x,y) = x+e^{xy}+\varphi(y) \qquad \text{per un'opportuna funzione } \varphi$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}+\varphi'(y).$$

Questa deve uguagliare $xe^{xy}+\cos y$ per cui: $xe^{xy}+\varphi'(y) = xe^{xy}+\cos y$.

Allora $\varphi'(y)=\cos y$, quindi $\varphi(y)=\sin y+\text{cost}$. Concludiamo che

$$f(x,y) = x+e^{xy}+\sin y+\text{costante}.$$

b) La forma differenziale

$$\omega = ye^x\,dx + (e^x - \cos y)\,dy$$

è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}(ye^x) = e^x, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(e^x - \cos y) = e^x.$$

Procedendo come nel punto (a) si ottiene:

$$f(x,y) = ye^x - \sin y + \text{cost.}$$

c) Verifichiamo se la forma differenziale

$$\omega = y\sin z\,dx + x\sin z\,dy + xy\cos z\,dz$$

è chiusa:

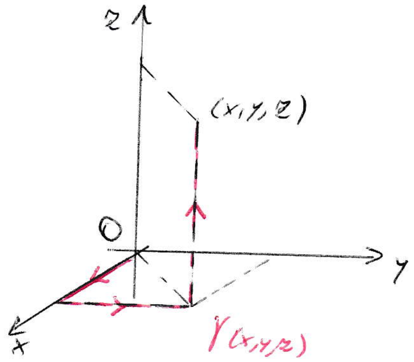
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sin z, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = \sin z$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = x\cos z, \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = x\cos z$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = y\cos z, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = y\cos z.$$

Poichè R^3 è semplicemente connesso, la forma è esatta.

Integriamo lungo la poligonale:



$$f(x,y,z) = \int_{\gamma_{(x,y,z)}} \omega = \int_0^x A(t,0,0)\,dt + \int_0^y B(x,t,0)\,dt + \int_0^z C(x,y,t)\,dt =$$

$$= \int_0^z xy\cos t\,dt = xy\sin z.$$

Quindi $f(x,y,z) = xy\sin z$.

Alternativamente integriamo le uguaglianze

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = A \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = B \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = C$$

Dalla prima si ha

$$f(x,y,z) = xy \operatorname{sen} z + \psi(y,z) \qquad \text{con } \psi \text{ funzione opportuna.}$$

Da ciò segue:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{sen} z + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

La seconda delle uguaglianze in $(*)$ dà allora:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \psi(y,z) = \varphi(z)$$

per una φ opportuna. Quindi

$$f(x,y,z) = xy \operatorname{sen} z + \varphi(z).$$

Da qui: $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy \cos z + \varphi'(z) \quad$ e la terza uguaglianza in $(*)$ dà:

$$\varphi'(z) = 0$$

da cui $\quad \varphi(z) = \text{cost}.$

Concludiamo che le primitive sono date da:

$$f(x,y,z) = xy \operatorname{sen} z + \text{costante}.$$

8. La forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dy$$

è esatta: come subito si constata

$$\omega = df, \qquad f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Allora

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = f(P_2) - f(P_1),$$

dove P_1 e P_2 sono il primo e secondo estremo della curva $\mathcal{C}$, quindi

$$P_1 = (0, b), \qquad P_2 = (a, 0).$$

Allora

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}.$$

9. La forma differenziale

$$\omega = x^2 y\,dx + (x^3+y^3)\,dy$$

non è esatta, poiché:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 3x^2.$$

Il calcolo di $\int_\gamma \omega$ mediante parametrizzazione dell'ellisse può essere semplificato mettendo in evidenza una parte esatta di ω. Ad es.:

$$\omega = \underbrace{\left(3x^2 y\,dx + (x^3+y^3)\,dy\right)}_{\omega_1} - \underbrace{2x^2 y\,dx}_{\omega_2}$$

ω_1 è esatta, per cui $\int_\gamma \omega_1 = 0$. Per ω_2 utilizziamo la parametrizzazione

$$\gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 = \int_0^{2\pi} (-2\cdot 9\cos^2 t \cdot 2\sin t\ (-3\sin t))\, dt =$$

$$= 108 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= 108 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2t\, dt = 27 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{27}{2}\left(2\pi - \frac{1}{4}\left[\sin 4t\right]_0^{2\pi}\right) = 27\pi.$$

10. La forma

$$\omega = \frac{2x-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\, dy$$

è chiusa:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)-(2x-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x+2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tuttavia ω è definita sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso; pertanto non possiamo concludere che ω sia esatta.

Si osservi che

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \text{ con } \qquad \omega_1 = \frac{2x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\, dy = df,$$

con $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

$$\omega_2 = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

ω_1 è esatta, mentre sappiamo che ω_2 è chiusa, ma non esatta. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_2 .$$

Ricordando che l'integrale di una forma chiusa lungo una curva γ non varia sostituendo γ con una curva $\tilde{\gamma}$ omotopa, si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{\tilde{\gamma}} \omega_2 \, ,$$

$\tilde{\gamma}$ circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario.

Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega_2 = \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)]\, dt = 2\pi .$$

11. $\rho = \rho(\vartheta) = a e^{\vartheta}$, $\vartheta \in [\alpha, 0]$ $(\alpha < 0)$

Ricordiamo che

$$ds = \left(\rho(\vartheta)^2 + \rho'(\vartheta)^2\right)^{1/2} d\vartheta ,$$

per cui

$$ds = \sqrt{2}\, a e^{\vartheta} d\vartheta .$$

Allora

$$\int_{\gamma_\alpha} (x^2+y^2)\, ds = \int_\alpha^0 a^2 e^{2\vartheta} \sqrt{2}\, a e^{\vartheta}\, d\vartheta =$$

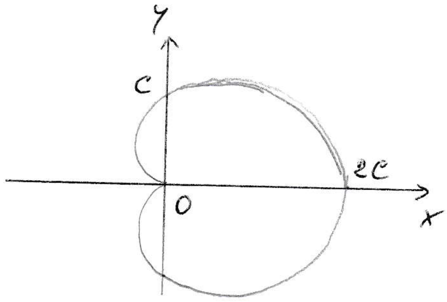
$$= \sqrt{2}\, a^3 \int_\alpha^0 e^{3\vartheta} d\vartheta = \sqrt{2}\, a^3 \frac{1}{3} \left[e^{3\vartheta}\right]_\alpha^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \left(1 - e^{3\alpha}\right)$$

Quindi il limite richiesto ("integrale" sull'arco di spirale fino all'origine) vale $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$.

12. $f(x,y) = c$

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = c$$



$$\rho^2 = c(\rho + \rho\cos\vartheta)$$

$$\rho = c(1+\cos\vartheta)$$ (cardioide)

Quindi

$$\text{lungh} = 2\int_0^\pi c\left((1+\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\right)^{1/2} d\vartheta = 2c \int_0^\pi (2+2\cos\vartheta)^{1/2} d\vartheta =$$

$$= 2\sqrt{2}\, c \int_0^\pi \sqrt{2} \cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta = 4c \cdot 2\left[\sin\frac{\vartheta}{2}\right]_0^\pi = 8c .$$

13. Una rappresentazione parametrica di $\mathscr{C}$ è data da:

$$\begin{cases} x = e^{\vartheta}\cos\vartheta \\ y = e^{\vartheta}\sin\vartheta \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\vartheta\alpha} \end{cases} \qquad \vartheta_0 \le \vartheta \le \vartheta_1$$

Quindi

$$\text{lungh } \mathscr{C} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[(e^{\vartheta}\cos\vartheta - e^{\vartheta}\sin\vartheta)^2 + (e^{\vartheta}\sin\vartheta + e^{\vartheta}\cos\vartheta)^2 + \frac{1}{2}(2\alpha e^{2\alpha\vartheta})^2 \right]^{1/2} d\vartheta$$

$$= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (2e^{2\vartheta} + 2\alpha^2 e^{4\alpha\vartheta})^{1/2} d\vartheta$$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\text{lungh } \mathscr{C} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (2e^{2\vartheta} + \frac{1}{2}e^{2\vartheta})^{1/2} d\vartheta = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} e^{\vartheta} d\vartheta = \sqrt{\frac{5}{2}} (e^{\vartheta_1} - e^{\vartheta_0}).$$

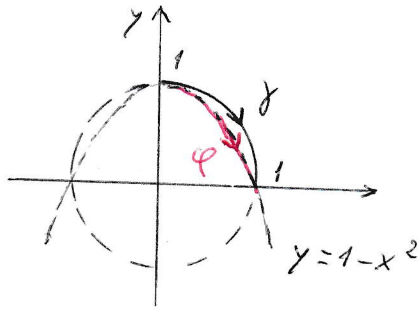
Se $\alpha = 1$:

$$\text{lungh } \mathscr{C} = \sqrt{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} e^{\vartheta} \sqrt{1 + e^{2\vartheta}}\, d\vartheta \qquad (t = e^{\vartheta})$$

$$= \sqrt{2} \int_{e^{\vartheta_0}}^{e^{\vartheta_1}} \sqrt{t^2+1}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\log(t + \sqrt{t^2+1}) + t\sqrt{t^2+1} \right]_{e^{\vartheta_0}}^{e^{\vartheta_1}} =$$

$$= \sqrt{2} \left(\log \frac{e^{\vartheta_1} + \sqrt{e^{2\vartheta_1}+1}}{e^{\vartheta_0} + \sqrt{e^{2\vartheta_0}+1}} + e^{\vartheta_1}\sqrt{e^{2\vartheta_1}+1} - e^{\vartheta_0}\sqrt{e^{2\vartheta_0}+1} \right).$$

14.a) Sia γ l'arco di circonferenza unitaria nel primo quadrante, orientato in senso orario (da $(0,1)$ a $(1,0)$); allora $-\gamma$ ha come rappresentazione parametrica:



$$-\gamma : \begin{cases} x=\cos\vartheta \\ y=\sin\vartheta \end{cases} \qquad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}.$$

Quindi l'integrale richiesto è:

$$\int_\gamma \omega = -\int_{-\gamma}\omega = -\int_0^{\pi/2}\left[(\sin^2\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta)\cdot(-\sin\vartheta)-(\cos^2\vartheta+\cos\vartheta\sin\vartheta)\cos\vartheta\right]d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\sin\vartheta - \cancel{\cos^2\vartheta\sin\vartheta} + \cancel{\cos\vartheta\sin^2\vartheta} + \cos\vartheta - \cancel{\sin^2\vartheta\cos\vartheta} + \cancel{\cos^2\vartheta\sin\vartheta})\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\sin\vartheta+\cos\vartheta)\,d\vartheta = \left[-\cos\vartheta+\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} = 1+1=2.$$

b) Sia φ l'arco di parabola $\begin{cases} x=t \\ y=1-t^2 \end{cases} \quad 0\le t\le 1.$

Il calcolo di $\int_\varphi \omega$ non è agevole. Tuttavia si osserva che ω è chiusa.

Infatti:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{(2y+x)(x^2+y^2)^{3/2}-(y^2+xy)\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{1/2}\cancel{2}y}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(2y+x)(x^2+y^2)-3y(y^2+xy)}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{2x^2y+2y^3+x^3+xy^2-3y^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{x^3-y^3+2x^2y-2xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

A parte il segno, il coefficiente $B(x,y)$ di dy si ottiene da $A(x,y)$

scambiando x con y, per cui

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{y^3 - x^3 + 2y^2x - 2yx^2}{(y^2+x^2)^{5/2}} = \frac{\partial A}{\partial y}.$$

Allora, poiché φ e γ sono omotope:

$$\int_\varphi \omega = \int_\gamma \omega = 2.$$

15. Poiché il semipiano $z>0$ è semplicemente connesso, l'esattezza di ω equivale alla sua chiusura.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = u(x) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = u'(x)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{1}{z} \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = 1$$

Allora ω è esatta se e solo se

$$u(x) = u'(x).$$

Questa è soddisfatta da tutte e sole le funzioni

$$u(x) = Ke^x \quad , \quad K \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo, ad es., $K=1$:

$$\omega(x,y,z) = (z+ye^x)\,dx + (\log z + e^x)\,dy + \left(\frac{y}{z}+x\right)dz.$$

Determiniamo una primitiva f integrando le uguaglianze:

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = z+ye^x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \log z + e^x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y}{z}+x.$$

Dalla prima:

$$f(x,y,z) = xz + ye^x + \psi(y,z)$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Dalla seconda in $(*)$ ricaviamo quindi:

$$e^x + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \log z + e^x$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \log z$$

$$\psi(y,z) = y\log z + \varphi(z).$$

Allora:

$$f(x,y,z) = xz + ye^x + y \log z + \varphi(z)$$

Deriviamo rispetto a z e uguagliamo secondo la terza in (*):

$$x + \frac{y}{z} + \varphi'(z) = \frac{y}{z} + x$$

$$\varphi'(z) = 0$$

$$\varphi(z) = \text{costante}.$$

Concludiamo che

$$f(x,y,z) = xz + ye^x + y \log z + \text{costante}.$$

16. $\underline{F}(x,y,z) = \left(4xz\ ,\ 2\dfrac{\sqrt{1-z^2}}{y^3}\ ,\ 2x^2 + \dfrac{z}{y^2\sqrt{1-z^2}}\right)$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |z|<1\ , y>0\}$.

Indichiamo con A, B e C le componenti di $\underline{F}$; la corrispondente forma differenziale è:

$\omega(x,y,z) = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)dz$.

Come subito si verifica

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}\ , \qquad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}\ .$$

Quindi ω verifica le condizioni necessarie di esattezza (è una forma chiusa); poiché Ω è semplicemente connesso ne segue che ω è esatta.

Sia $V:\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione primitiva (potenziale del campo vettoriale $\underline{F}$). Deve essere:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A\ , \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = B\ , \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = C.$$

Dalla prima segue che (integrando)

$V(x,y,z) = 2x^2z + \varphi(y,z)$ per un'opportuna φ da determinare.

Ne segue che $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, per cui l'uguaglianza $\dfrac{\partial V}{\partial y} = B$ dà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{y^3}$$

$\varphi(y,z) = -\dfrac{1}{y^2}\sqrt{1-z^2} + \psi(z)$ per un'opportuna ψ da determinare.

A questo punto abbiamo quindi

$$V(x,y,z) = 2x^2z - \frac{1}{y^2}\sqrt{1-z^2} + \psi(z).$$

Imponiamo a questa funzione di verificare l'ultima uguaglianza: $\dfrac{\partial V}{\partial z} = C$.

$$2x^2 - \frac{1}{y^2}\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} + \psi'(z) = 2x^2 + \frac{z}{y^2\sqrt{1-z^2}}$$

da cui

$$\psi'(z)=0, \qquad \text{quindi } \psi(z)=\text{costante.}$$

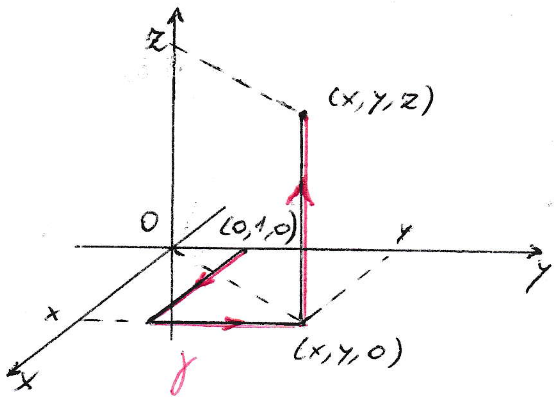
Concludiamo che le funzioni primitive sono date da:

$$(*) \qquad V(x,y,z) = 2x^2 z - \frac{1}{y^2}\sqrt{1-z^2} + \text{cost.}$$

Calcoliamo una primitiva anche in un altro modo. Fissato $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ risulta

$$V(x,y,z) = \int_\gamma \omega$$

dove γ è una qualunque curva (in Ω) che unisce (x_0,y_0,z_0) e (x,y,z).
Ad es. come γ possiamo prendere la spezzata in figura, con $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,0)$:



$$V(x,y,z) = \int_0^x A(t,1,0)\,dt + \int_1^y B(x,t,0)\,dt + \int_0^z C(x,y,t)\,dt =$$

$$= \int_1^y \frac{2}{t^3}\,dt + \int_0^z \left(2x^2 + \frac{t}{y^2\sqrt{1-t^2}}\right)dt =$$

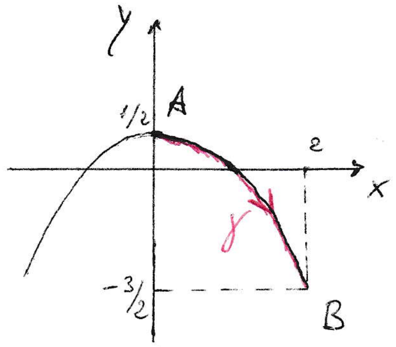
$$= -\frac{1}{y^2} + 1 + 2x^2 z + \left[-\frac{\sqrt{1-t^2}}{y^2}\right]_{t=0}^{t=z} = -\frac{1}{y^2} + 1 + 2x^2 z - \frac{1}{y^2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$= 2x^2 z - \frac{1}{y^2}\sqrt{1-z^2} + 1.$$

Fra tutte le primitive di cui nella formula $(*)$, questa è quella che nel punto (x_0,y_0,z_0) vale 0.

17. $\omega(x,y) = \left(\frac{1}{2}\log(2y+x^2) + \frac{x^2}{2y+x^2}\right)dx + \left(\frac{\alpha x}{2y+x^2} - y\right)dy.$

a)



$\int_\gamma \omega$

$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-t^2}{2} \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\log 1 + \frac{t^2}{1}\right) - t\left(\frac{\alpha t}{1} - \frac{1-t^2}{2}\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^2 \left[-\frac{1}{2}t^3 + (1-\alpha)t^2 + \frac{1}{2}t\right] dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{3}(1-\alpha)t^3 + \frac{1}{4}t^2\right]_0^2 = -\frac{16}{8} + \frac{8}{3}(1-\alpha) + 1 = \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\alpha$$

b) Imponiamo che valgano le condizioni necessarie di esattezza: $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2y+x^2}\cdot 2 - \frac{2x^2}{(2y+x^2)^2} = \frac{2y+x^2-2x^2}{(2y+x^2)^2} = \frac{2y-x^2}{(2y+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \alpha \cdot \frac{2y+x^2-x\cdot 2x}{(2y+x^2)^2} = \alpha \cdot \frac{2y-x^2}{2y+x^2}$$

Deve allora essere $\alpha = 1$.

L'insieme naturale di definizione di ω è

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y + x^2 > 0\},$$

che è semplicemente connesso. Pertanto in tale insieme ω è esatta per $\alpha = 1$.

Per individuare una primitiva f, imponiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = B.$$

Conviene integrare la seconda uguaglianza rispetto a y:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x\log(2y+x^2)-\frac{1}{2}y^2+\varphi(x).$$

Imponendo ora che tale funzione soddisfi $\frac{\partial f}{\partial x}=A$ si ottiene subito

$$\varphi(x)=\text{cost}.$$

Allora

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x\log(2y+x^2)-\frac{1}{2}y^2+\text{cost}.$$

Osserviamo che, se $\alpha=1$, il valore dell'integrale $\int_\gamma \omega$ di cui al punto precedente si ottiene come

$$f(B)-f(A)=\frac{1}{2}2\log 1-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{9}{4}+\frac{1}{8}=-1.$$

18. $\omega = A\,dx + B\,dy$ $\qquad \Omega$ stellato rispetto all'origine

Sia $S_{(x,y)}$ il segmento che unisce l'origine al punto (x,y):

$$S_{(x,y)} : t \mapsto (tx, ty) : [0,1] \to \Omega.$$

Risulta:

$$f(x,y) \overset{\text{def}}{=} \int_{S_{(x,y)}} \omega = \int_0^1 [A(tx,ty)x + B(tx,ty)y]\,dt$$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ utilizzando le formule di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \left[\frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty)tx + A(tx,ty) + \frac{\partial B}{\partial x}(tx,ty)ty\right]dt \;,$$

poiché ω è chiusa per ipotesi, abbiamo $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$, quindi

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \left(\frac{\partial A}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial A}{\partial y}(tx,ty)y\right)t\,dt + \int_0^1 A(tx,ty)\,dt$$

Il primo di due integrali vale:

$$\int_0^1 t\frac{d}{dt}(A(tx,ty))\,dt = [t\,A(tx,ty)]_0^1 - \int_0^1 A(tx,ty)\,dt$$

$$= A(x,y) - \int_0^1 A(tx,ty)\,dt$$

Da $(*)$ deduciamo quindi che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A(x,y).$$

Analogamente si dimostra che $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x,y)$. Quindi ω è esatta.