Analisi Matematica 2
Complementi di Analisi Matematica 1

Programma per l'Anno 2022/23

1) Equazioni differenziali ordinarie: cenni ai principali problemi della teoria (esistenza delle soluzioni, unicità, regolarità, dominio di definizione); problema di Cauchy per le equazioni scalari del primo e del secondo ordine; equazioni a variabili separabili (risoluzione esplicita; ricerca delle soluzioni stazionarie; condizioni per l'unicità; fenomeno dell'esplosione in tempi finiti); equazioni lineari del primo ordine a coefficienti variabili (struttura dell'insieme delle soluzioni; equazione "completa" ed equazione omogenea associata; metodo della variazione delle costanti); equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti variabili (struttura dell'insieme delle soluzioni; equazione "completa" ed equazione omogenea associata; trattazione dei secondi membri di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico; fenomeno della risonanza).

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 4.1.1, 4.1.2, 4.1.6 (senza le equazioni "esatte"), 4.2.1 (limitandosi al caso scalare), 4.2.4 (soltanto le parti che riguardano le equazioni scalari di ordine superiore al primo, senza il riferimento ai sistemi; vedi soprattutto Esempio 2.11), 4.2.6 (soltanto le parti che riguardano le equazioni scalari di ordine superiore al primo, senza il riferimento ai sistemi; vedi soprattutto dall'Esempio 2.14 in poi).

2) Spazi metrici e spazi normati. Topologia di $\mathbb{R}^N$: richiami sugli spazi vettoriali; spazi normati; spazi metrici; prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; verifica della disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^N$; elementi di topologia (punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati; insiemi aperti e chiusi; interno e chiusura di un insieme; caratterizzazione della chiusura tramite successioni); teorema di Bolzano-Weiestrass; retta reale estesa, punto all'infinito, $\mathbb{R}^N$ "esteso" (cenni); compattezza, compattezza per successioni; in $\mathbb{R}^N$ un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; connessione (definizione utilizzando gli insiemi separati; topologia indotta e caratterizzazione della connessione tramite la topologia indotta); connessione per archi; gli aperti connessi sono connessi per archi; norme equivalenti; teorema sull'equivalenza delle norme in dimensione finita; totale limitatezza; teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti; esempi di situazioni infinito-dimensionali in cui chiuso e limitato non implica compatto.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2., 3.2.3 (solo leggere), 3.2.4 (senza dimostrazione del teorema di Heine-Borel; infatti si è privilegiato l'approccio tramite la compattezza per successioni); 3.2.5. [Vol. II]: 3.1.1. Vedi [EG, par. 6.1] per il teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti e [GG, par. III.2] per l'equivalenza delle norme su spazi di dimensione finita.

3) Limiti e continuità: successioni a valori in uno spazio metrico, concetto di limite, successioni di Cauchy; completezza; esempi di spazi metrici completi e non completi; limiti di funzioni da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$; verifica dell'esistenza del limite, anche utilizzando le coordinate polari; continuità di funzioni definite e a valori in spazi metrici; caratterizzazione della continuità in un punto utilizzando gli intorni; caratterizzazione della continuità globale utilizzando gli aperti; funzioni continue su compatti e su connessi; continuità uniforme e teorema di Heine.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 4.3.5 (come richiamo), 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 5.1.4 (come richiamo), 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 (il teorema 2.10 si suppone già noto).

4) Calcolo differenziale: derivate parziali e direzionali; differenziabilità; funzioni di classe C^1; matrice Jacobiana; gradiente e suo significato geometrico; estensione del teorema di Lagrange al caso delle funzioni di più variabili; teorema del differenziale totale (7.1.2); enunciato del teorema di Schwarz; derivate parziali e direzionali di ordine superiore al primo; matrice Hessiana; formula di Taylor per funzioni di più variabili (secondo ordine con resto in forma di Peano); insiemi convessi e funzioni convesse; massimi e minimi liberi per funzioni di più variabili; studio della matrice Hessiana e della forma quadratica ad essa associata.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 6.1.5 (come richiamo), 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3 (senza la dimostrazione del teorema di Schwarz; anche il Teorema 1.4 è stato solo accennato; limitarsi a leggere la parte sui differenziali di ordine superiore al primo), 7.1.4 (per la formula di Taylor si è preferito però seguire [EG, par. 4.3]), 7.1.5 (solo leggere; per la caratterizzazione della convessità si è utilizzata la matrice Hessiana anziché il differenziale secondo), 7.2.1, 7.2.2. [Vol. II]: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5. Vedi anche [EG, Esempio 4.5.1] per lo studio degli autovalori della matrice Hessiana.

5) Calcolo integrale: definizione di integrale di Riemann su un rettangolo di $\mathbb{R}^2$; teorema di riduzione; proprietà fondamentali dell'integrale; integrali su insiemi qualunque; insiemi di misura nulla; riduzione degli integrali su insiemi "normali"; teorema di cambiamento di variabile (solo idea geometrica della dimostrazione); estensione della teoria al caso N-dimensionale (cenni); coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cilindriche e sferiche in $\mathbb{R}^3$; calcolo del baricentro; volume dei solidi di rotazione; integrali dipendenti da parametro: continuità e derivabilità; integrali impropri in dimensione uno; criteri di convergenza per integrali impropri (confronto e confronto asintotico); comportamento dell'integrale di $|x|^{-\alpha}$ vicino a 0 e vicino a ∞ al variare di $\alpha > 0$; integrale in valor principale. Cenno a: estensione dell'integrazione impropria al caso N-dimensionale, funzione Γ, calcolo del volume della palla unitaria in dimensione N, integrazione delle funzioni radiali.

Riferimenti al testo: [Vol. II]: 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5, 5.1.6 (senza la dimostrazione del Teorema 1.14), 5.1.7, 5.1.8. [Vol. I]: 8.1.9 (integrali dipendenti da parametro); 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3 (integrali impropri unidimensionali). [Vol. II]: 5.1.9, 5.1.10 (integrali impropri in dimensione N).

6) Curve, superfici, funzioni implicite: curve in $\mathbb{R}^N$; rettificabilità; vettore tangente e vettori normali; lunghezza di una curva; giustificazione della definizione di lunghezza di una curva tramite poligonali inscritte; integrali curvilinei; riparametrizzazioni; lunghezza d'arco; teorema delle funzioni implicite (caso bidimensionale); punti regolari e punti singolari; regolarità e derivate della funzione implicita; superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$; area di una superficie; integrali di superficie; curve tracciate su una superficie, prima forma fondamentale (cenni); teorema delle funzioni implicite nel caso generale (solo enunciato e trattazione euristica del caso di due vincoli scalari in $\mathbb{R}^3$); spazio tangente e spazio normale a superfici definite in forma parametrizzata e in forma implicita (con cenni all'estensione al caso delle ipersuperfici); teorema di invertibilità locale (enunciato generale e, nel solo caso unidimensionale, deduzione dal teorema della funzione implicita); estremi vincolati; metodo dei moltiplicatori di Lagrange, anche nel caso di più vincoli scalari.

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.2.1, 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 (solo leggere), 6.1.8 (solo leggere), 2.2.1, 2.2.2. Vedi anche [EG, par. 7.6] per il teorema di invertibilità locale.

7) Forme differenziali: Complementi sulle curve (orientamento, 'saldatura'). Forme differenziali e lavoro di una forza. Integrale di una forma differenziale lungo una curva. Forme esatte (campi conservativi). Condizioni necessarie di esattezza: forme chiuse. Caratterizzazione dell'esattezza mediante integrazione lungo le curve chiuse: enunciato (e dimostrazione per i matematici). Lemma di Poincaré per aperti stellati. Locale esattezza delle forme chiuse. Definizione di curve omotope. Invarianza dell'integrale di una forma chiusa rispetto a curve omotope: enunciato (è richiesto solo un cenno della dimostrazione ai matematici). Definizione di insieme semplicemente connesso. Esattezza delle forme chiuse su insiemi semplicemente connessi.

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4.

8) Teoremi della divergenza e di Stokes: domini regolari nel piano. Formule di Gauss-Green nel piano: enunciato (e dimostrazione, nel caso di domini regolari normali, per i matematici). Applicazione al calcolo di aree. Deduzione del Teorema della divergenza nel piano. Teorema della divergenza in dimensione $N = 3$ (solo enunciato). Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

Orientamento di una superficie. Superficie con bordo; orientamento del bordo indotto dall'orientamento della superficie. Enunciato del Teorema di Stokes. Cenno all'inquadramento del Teorema di Stokes e della divergenza nell'ambito delle forme differenziali di grado più alto.

N.B.: Le parti in rosso fanno parte del programma di Analisi Matematica 2 e **non fanno parte** del programma di Complementi di Analisi Matematica 1.

Testi di riferimento:

[Vol. I] C.D. Pagani, S. Salsa, *"Analisi Matematica 1 - Seconda Edizione"*, Zanichelli.

[Vol. II] C.D. Pagani, S. Salsa, *"Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione"*, Zanichelli.

[EG] E. Giusti, *"Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione"*, Bollati Boringhieri.

[GG] G. Gilardi, *"Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione"*, McGraw-Hill Italia.