Corso di laurea in Matematica – Corso di laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2022/2023

Esempio di prova scritta

---

**1. M-F** Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione

$$g(x,y) = 5\arctan\frac{y}{x} - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

nel punto $(-3,4)$.

**2. M-F** Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $\log(x^2+y^2)$ relativamente al punto $(1,0)$.

**3. M-F** Calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}y,$$

dove $\gamma$ è l'arco di ellisse di equazione $x^2/4+y^2=1$ di primo estremo $A=(0,1)$ e secondo estremo $B=(2,0)$.

**(Qui di seguito il risultato con motivazione sintetica)**

**4. M-F** Sia

$$f(x,y) = x^2 - y - 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

$a)$ Verificare che $f$ è non positiva in un intorno di $(0,0)$.

$b)$ Determinare gli eventuali punti di massimo/minimo locale o assoluto di $f$ su $\mathbb{R}^2$.

$c)$ Determinare i punti di massimo/minimo assoluto di $f$ sul cerchio chiuso $C = \overline{B}_1(0,0)$.

**(Qui di seguito riportare i punti principali dello svolgimento)**

**T1.** (Fisici) Sia $f$ la funzione reale definita da $f(x) = a \cdot x$ per $x \in \mathbb{R}^3$ ($a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). Quali delle seguenti affermazioni sono implicate dalle ipotesi poste? [Scrivere Vero o Falso a fianco di ciascuna]

*a*) L'origine è un punto di massimo o di minimo locale.

*b*) Se $\overline{x}$ risolve il problema $\max_{|x|\leq 1} f$, allora risolve anche il problema $\max_{|x|<1} f(x)$.

*c*) Se $\overline{x}$ risolve il problema $\max_{x\in S^2} f$ (dove $S^2$ indica la superficie della sfera unitaria) , allora risolve anche il problema $\max_{|x|\leq 1} f(x)$.

*d*) $f$ può avere più di un punto di massimo assoluto su $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1\}$.

**T2.** (Fisici) Si dimostri che una funzione su un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ con derivate prime nulle è costante.

**T3.** (Fisici) Si deduca il Teorema di inversione locale in una variabile a partire dal Teorema del Dini.

**5. M** Si consideri la curva piana di equazione

$$\mathscr{C} : (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0, \qquad y \geq 0.$$

*a*) Si scriva l'equazione della curva in coordinate polari e se ne tracci un grafico qualitativo.

*b*) Verificare che in un intorno del punto $A = (0, 1)$ la curva $\mathscr{C}$ è grafico di una funzione $\varphi(x)$.

*c*) Verificare che, in un intorno del punto $A$, la parabola di equazione $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ si trova all'esterno della regione $E$ racchiusa dalla curva $\mathscr{C}$.

**(Qui di seguito riportare i punti principali dello svolgimento)**

Corso di laurea in Matematica – Corso di laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Esempio di prova scritta

---

**1. M-F** Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione

$$g(x,y) = 5\arctan\frac{y}{x} - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

nel punto $(-3,4)$.

| |
|---|
| $2x - 11y + 50 = 0$ |

**2. M-F** Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione $\log(x^2+y^2)$ relativamente al punto $(1,0)$.

| |
|---|
| $P_2(x-1,y) = 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2.$ |

**3. M-F** Calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}y,$$

dove $\gamma$ è l'arco di ellisse di equazione $x^2/4 + y^2 = 1$ di primo estremo $A = (0,1)$ e secondo estremo $B = (2,0)$.

**(Qui di seguito il risultato con <u>motivazione sintetica</u>)**

La forma differenziale si può scrivere come somma della forma differenziale $\tilde{\omega}(x,y) = x/\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x$ e della forma differenziale esatta $x/\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x + y/\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x,y)$, con $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Allora

$$I = \int_\gamma \tilde{\omega} + f(B) - f(A) = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{2+\frac{3}{4}t^2}}\mathrm{d}t + \sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{7}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

**4. M-F** Sia

$$f(x,y) = x^2 - y - 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

*a*) Verificare che $f$ è non positiva in un intorno di $(0,0)$.

*b*) Determinare gli eventuali punti di massimo/minimo locale o assoluto di $f$ su $\mathbb{R}^2$.

*c*) Determinare i punti di massimo/minimo assoluto di $f$ sul cerchio chiuso $C = \overline{B}_1(0,0)$.

**(Qui di seguito riportare i punti principali dello svolgimento)**

*a*) In coordinate polari la funzione $f$ si scrive:

$$f(x,y) = \varrho(\varrho\cos^2\vartheta - \sin\vartheta - 2).$$

Il termine in parentesi è negativo per $\varrho \leq 1$.

*b*) La funzione $f$ è derivabile al di fuori dell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1 - 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

I punti critici sono pertanto $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$. Valutiamo le derivate seconde.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 2\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Risulta $H(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = -3 < 0$: i punti critici sono pertanto punti di sella.

Dal punto ($a$) segue che l'unico punto di estremo è l'origine, punto di massimo locale. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty, \qquad \lim_{y\to+\infty} f(0,y) = -\infty,$$

la funzione non ha né massimo né minimo assoluti su $\mathbb{R}^2$.

*c*) Da quanto precede ricaviamo che $f$ non ha punti critici all'interno di $C$, ed è presente un punto singolare, l'origine, che è di massimo locale. Non resta che studiare la funzione sul bordo di $C$, cioè sulla circonferenza unitaria. Su di essa la funzione vale $x^2 - y - 2$. Applichiamo allora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla funzione $h(x,y) = x^2 - y$:

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -1 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ \lambda = \mp 1/2, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = \pm\sqrt{3}/2 \\ y = -1/2. \end{cases}$$

Confrontiamo i valori:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = -\frac{3}{4}, \qquad f(0,1) = -3, \qquad f(0,-1) = -1.$$

Concludiamo che l'origine è punto di massimo assoluto su $C$ (del resto questo seguiva anche direttamente da quanto svolto al punto ($a$)), mentre $(0,1)$ è punto di minimo assoluto.

**T1.** (Fisici) Sia $f$ la funzione reale definita da $f(x) = a \cdot x$ per $x \in \mathbb{R}^3$ ($a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$). Quali delle seguenti affermazioni sono implicate dalle ipotesi poste? [Scrivere Vero o Falso a fianco di ciascuna]

*a*) L'origine è un punto di massimo o di minimo locale.

*b*) Se $\overline{x}$ risolve il problema $\max_{|x|\leq 1} f$, allora risolve anche il problema $\max_{|x|<1} f(x)$.

*c*) Se $\overline{x}$ risolve il problema $\max_{x\in S^2} f$ (dove $S^2$ indica la superficie della sfera unitaria) , allora risolve anche il problema $\max_{|x|\leq 1} f(x)$.

*d*) $f$ può avere più di un punto di massimo assoluto su $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1\}$.

**T2.** (Fisici) Si dimostri che una funzione su un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ con derivate prime nulle è costante.

**T3.** (Fisici) Si deduca il Teorema di inversione locale in una variabile a partire dal Teorema del Dini.

**5. M** Si consideri la curva piana di equazione

$$\mathscr{C} : (x^2+y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0, \qquad y \geq 0.$$

*a*) Si scriva l'equazione della curva in coordinate polari e se ne tracci un grafico qualitativo.

*b*) Verificare che in un intorno del punto $A = (0,1)$ la curva $\mathscr{C}$ è grafico di una funzione $\varphi(x)$.

*c*) Verificare che, in un intorno del punto $A$, la parabola di equazione $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ si trova all'esterno della regione $E$ racchiusa dalla curva $\mathscr{C}$.

**(Qui di seguito riportare i punti principali dello svolgimento)**

*a*) In coordinate polari la curva diventa:

$$\varrho^4 + \varrho^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = 0,$$

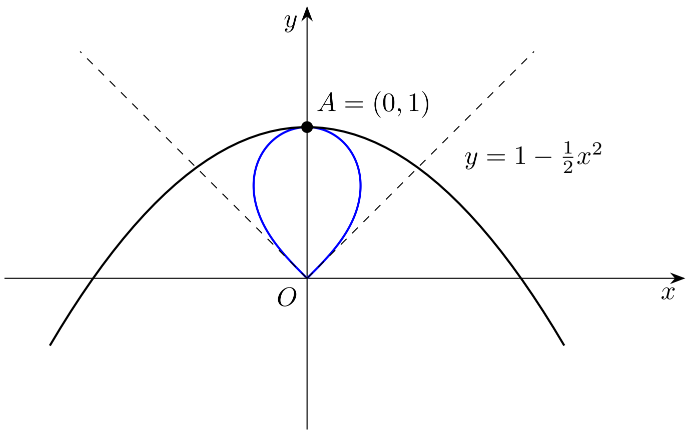
cioè $\varrho^2 = -\cos 2\vartheta$, quindi

$$\varrho = \sqrt{-\cos 2\vartheta}.$$

Pertanto deve essere $\cos 2\vartheta \geq 0$, per cui, tenendo conto che è chiesto di considerare solamente la parte di curva nel semipiano $y \geq 0$, i valori $\vartheta$ da considerare sono

$$\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{3}{4}\pi.$$

A partire dall'andamento del grafico della funzione $\cos 2\vartheta$ su tale intervallo si traccia qualitativamente la curva come in Figura.




*b*) Cerchiamo di applicare il Teorema del Dini al punto $A = (0,1)$. Sia $g(x,y) = (x^2+y^2)^2 + x^2 - y^2$. Allora

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 - 2y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) \neq 0.$$

Possiamo quindi applicare il Teorema e concludere che la curva $\mathscr{C}$ può essere scritta come grafico $y = \varphi(x)$ in un intorno del punto $A$.

*c*) Sviluppiamo $\varphi$ mediante la formula di Taylor nell'intorno di $x = 0$. Risulta:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 + 4xy^2 + 2x,$$

quindi

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x\big(x,\varphi(x)\big)}{g_y\big(x,\varphi(x)\big)} = -\left.\frac{4x^3+4xy^2+2x}{4x^2y+4y^3-2y}\right|_{y=\varphi(x)}.$$

Quindi $\varphi'(0) = 0$.

Ricaviamo ora $\varphi''(0)$ derivando due volte l'identità $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, cioè:

$$\big(x^2 + \varphi(x)^2\big)^2 + x^2 - \varphi(x)^2 = 0.$$

Derivando una volta si ha:

$$2(x^2 + \varphi^2)(x + \varphi\varphi') + x - \varphi\varphi' = 0,$$

e derivando ulteriormente:

$$4(x + \varphi\varphi')^2 + 2(x^2 + \varphi^2)(1 + \varphi'^2 + \varphi\varphi'') + 1 - \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0.$$

Valutiamo ora in $x = 0$, ricordando che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$:

$$3 + \varphi''(0) = 0, \quad \text{quindi} \quad \varphi''(0) = -3.$$

Allora in un intorno di $x = 0$

$$\varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) < 1 - \frac{1}{2}x^2$$

per $|x|$ sufficientemente piccolo. Concludiamo che, in un intorno del punto $A = (0, 1)$ la parabola di equazione $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ è esterna alla regione $E$ racchiusa da $\mathscr{C}$.