Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Scritto del 5 luglio 2023

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Determinare l'integrale generale dell'equazione $y'''(t) = 8(y(t) - t)$.

2. M-F Riportare solo il risultato

Data la forma differenziale $\omega = y^2 \sin xy \, \mathrm{d}x + (xy \sin xy - \cos xy) \, \mathrm{d}y$, calcolare l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\pi + \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 3\pi/2]$.

3. M-F Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

determinare dove f è concava, dove è convessa e dove non è né concava né convessa.

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Sia data

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - \alpha x^2 y^2 - xy \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

e sia $Z(f)$ l'insieme degli zeri di f.

a) Individuare, al variare di α, i punti di $Z(f)$ per i quali non è possibile applicare il Teorema della funzione implicita (ad alcuna delle due variabili).

b) Dimostrare che l'insieme $Z(f)$ è limitato nei casi $\alpha = -2$ e $\alpha = 1$. (Può essere utile studiare il comportamento di f all'infinito).

c) Studiare la limitatezza di $Z(f)$ anche nel caso $\alpha = 2$.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di differenziale. Dimostrare l'unicità del differenziale. Dimostrare che se f è differenziabile in un punto x_0 allora è anche continua in x_0.

T2. (Fisici) Dati un insieme A di $\mathbb{R}^N$, una funzione $f \in C^0(A;\mathbb{R})$ e una curva γ a immagine in A, ricordare l'espressione dell'integrale $\int_\gamma f \, \mathrm{d}s$ di f lungo γ. Data quindi $f \in C^0(\overline{B}(0,1);\mathbb{R})$, dimostrare la formula

$$\iint_{B(0,1)} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{C_r} f \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}r,$$

ove C_r rappresenta la circonferenza di centro 0 e raggio r.

T3. (Fisici) Dimostrare, a partire dalla definizione di continuità in un punto, che, se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è continua (in tutti i punti), allora per ogni aperto A di $\mathbb{R}^M$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è aperta in $\mathbb{R}^N$. Mostrare tramite un esempio concreto che, sempre supponendo f continua da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$, se B è un aperto di $\mathbb{R}^N$ l'immagine $f(B)$ può non essere aperta in $\mathbb{R}^M$.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si definisca $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$F(x,y) := \int_0^y \int_0^x f(r,s) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}s.$$

(a) Dimostrare che f è derivabile parzialmente in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e determinare l'espressione delle derivate parziali di f.

(b) Dimostrare che f è di classe C^1.

(c) Nel caso in cui $f(x,y) = x^2 + y^2$, determinare il valore massimo e il valore minimo assoluto di F su $\overline{B}(0,1)$, nonché i punti di massimo e di minimo assoluti.