Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2022/2023

Scritto del 13 settembre 2023

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Utilizzando un opportuno cambiamento di variabile determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = 1 + te^{-y}$.

2. M-F Riportare solo il risultato

Data $F(x, y) = (\sin 2x + \cos y - 1, \sin x + \cos y - 1)$ e detta $G(x, y) = F(F(F(x, y)))$, determinare la matrice Jacobiana $JG(\pi, 0)$

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

(a) Si consideri la funzione $f(x, y) = \sin x \cos y$. Determinare, innanzitutto, i punti stazionari di f nel quadrato $(-\pi/4, 7\pi/4)^2$ e stabilire quali di questi punti sono massimi relativi, quali sono minimi relativi e quali sono punti di sella.

(b) Determinare quindi i punti di massimo e minimo *relativo* di f vista come funzione definita sul quadrato **chiuso** $Q = [-\pi/4, 7\pi/4]^2$ (ricordiamo che, per esempio, (x_0, y_0) è di minimo relativo se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in Q \cap B((x_0, y_0), \epsilon)$).

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = xe^y - ye^x$ e sia $Z(F)$ l'insieme in cui F si annulla. Determinare in quali punti di $Z(F)$ il teorema delle funzioni implicite non è applicabile. Rappresentare quindi (qualitativamente) $Z(F)$ su un diagramma cartesiano.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Dimostrare che:

a) la funzione $d\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $d(x, y) = \|x - y\|$ è una distanza su V;

b) la funzione $\delta = d/(1 + d)$ (con d come in (*a*)) è una distanza su V equivalente a d.

T2. (Fisici) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.

a) Dimostrare la formula dello sviluppo di Taylor del secondo ordine di f relativo al punto $(0, 0)$.

b) Se $(0, 0)$ è un punto stazionario su cui f si annulla, qual è il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione f^2 relativo al punto $(0, 0)$?

T3. (Fisici) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia ω una forma differenziale *chiusa* su Ω. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere, giustificando la risposta.

a) Se $\Omega = B_1(0) \setminus \overline{B}_{1/2}(0)$ allora ω è esatta.

b) Se $\Omega = B_1(0) \setminus \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 \le 1/4\}$ allora ω è esatta.

c) ω è localmente esatta (cioè ogni punto possiede un intorno su cui la forma è esatta).

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dire se ciascuna delle seguenti condizioni è sufficiente perché f ammetta almeno un punto di minimo assoluto. In caso affermativo dare una dimostrazione e in caso negativo fornire un controesempio (ovvero descrivere una funzione che soddisfa la condizione data, ma non ammette alcun punto di minimo assoluto).

(*a*) f ha tutti i sottolivelli limitati (ovvero per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}((-\infty, M])$ è limitato);

(*b*) f è inferiormente limitata e ha tutte le curve di livello limitate (ovvero per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(M)$ è limitato);

(*c*) f è convessa e limitata inferiormente;

(*d*) f è concava e limitata inferiormente;

(*e*) f è strettamente convessa (si supponga pure f di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$, con Hessiana definita positiva in tutti i punti) e inferiormente limitata.