Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Scritto del 20 giugno 2023

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Determinare la soluzione del problema di Cauchy costituito dall'equazione $y''(t) + 2y'(t) + 1 = 0$ e dalle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}t$

2. M-F Riportare solo il risultato

Determinare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = \left(e^t, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{2t}, e^{3t}\right), \qquad t \in [0, 1].$$

$L = e^3 + e - 2$

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

Sia data la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definita come il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ in cui $F(x, y, z) = x^2 + y - z + 1 = 0$. Determinare il punto $P_1 \in S$ di minima distanza di S dall'origine. Data inoltre, per $a \in \mathbb{R}$, S_a descritta come il luogo dei punti in cui $F_a(x, y, z) = x^2 + ay - z + 1 = 0$, determinare al variare di a, il punto P_a avente minima distanza dall'origine. Stabilire infine per quale $a \in \mathbb{R}$ la distanza di P_a dall'origine è massima.

$f(x,y,z) = d^2((x,y,z),0) = x^2+y^2+z^2$, $\min_{S_a} f$

moltiplicatori di Lagrange : $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F_a \\ F_a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda a \\ 2z = -\lambda \\ x^2 + ay - z + 1 = 0 \end{cases}$

Soluzione: $P_a = \left(0, -\frac{a}{a^2+1}, \frac{1}{a^2+1}\right)$.

$f(P_a) = 1/(a^2+1)$

Il massimo valore di $f(P_a)$ si ha per $a = 0$.

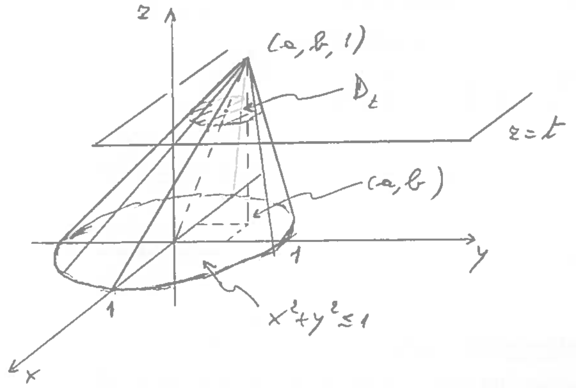
4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

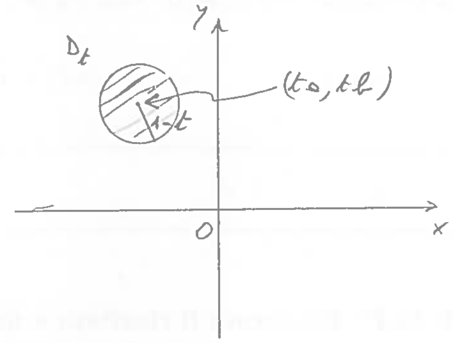
Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si consideri il cono $C(a, b) \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto come unione di tutti i segmenti aventi come estremi il punto $(a, b, 1)$ e un generico punto $(x, y, 0)$ tale che $x^2 + y^2 \leq 1$ (ciò vale a dire un generico punto appartenente al prodotto cartesiano $\overline{B}(0,1) \times \{0\}$).

Calcolare, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il valore dell'integrale

$$\iiint_{C(a,b)} (x + y)\, dx\, dy\, dz$$

(si consiglia di integrare per strati considerando, al variare di $z \in [0, 1]$, l'intersezione del cono $C(a, b)$ col piano orizzontale $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$).





$$I = \iint_{C(a,b)} (x+y)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dt \iint_{D_t} (x+y)\, dx\, dy \qquad \begin{cases} x = ta + \xi \\ y = tb + \eta \end{cases}$$

$$= \int_0^1 dt \iint_{B_{1-t}(0,0)} (ta + tb + \xi + \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_0^1 dt \iint_{B_{1-t}(0,0)} t(a+b)\, d\xi\, d\eta = \int_0^1 (a+b)\,\pi\,(1-t)^2\, dt$$

$$= \pi(a+b) \int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t)\, dt = \pi(a+b)\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi(a+b).$$

1. $$y''(t)+2y'(t)+1=0$$

$$y''(t)+2y'(t)=-1$$

omogenea: $y''+2y'=0$

eq. caratteristica: $z^2+2z=0$ $\qquad z_1=0\,,\quad z_2=-2$

$$y_0(t)=c_1+c_2e^{-2t}\,,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\qquad \text{(soluzioni eq. omogenea)}$$

Possiamo cercare una soluzione $\bar{y}$ dell'equazione completa della forma

$$\bar{y}(t)=Ct\,,\quad C\in\mathbb{R}$$

($z=0$ è infatti soluzione dell'equazione caratteristica). Deve essere

$$\bar{y}''+2\bar{y}'=-1$$

$$2C=-1\quad :\quad C=-1/2.$$

Allora l'integrale generale dell'eq. data è:

$$y(t)=c_1+c_2e^{-2t}-\frac{1}{2}t\,,\qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$y(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$

$y'(0)=0 \Rightarrow \left(-2c_2e^{-2t}-\frac{1}{2}\right)\Big|_{t=0}=0 \qquad -2c_2-\frac{1}{2}=0 \qquad c_2=-\frac{1}{4}.$

Concludiamo che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}t.$$

2. $\gamma(t) = \left(e^t, \sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{2t}, e^{3t}\right)$, $t \in [0,1]$

Una parametrizzazione equivalente è ($s = e^t$)

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(s, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, s^2, s^3\right), \qquad s \in [1, e].$$

Risulta:

$$\tilde{\gamma}'(s) = \left(1, 2\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, s, 3s^2\right)$$

$$|\tilde{\gamma}'(s)|^2 = 1 + 6s^2 + 9s^4 = (1 + 3s^2)^2.$$

Quindi la lunghezza è

$$L = \int_1^e |\tilde{\gamma}'(s)|\, ds = \int_1^e (1 + 3s^2)\, ds = e - 1 + [s^3]_1^e = e^3 + e - 2.$$

3. $F_a(x,y,z) = x^2 + ay - z + 1$, $\qquad a \in \mathbb{R}$

$S_a: \quad F_a(x,y,z) = 0$

$f(x,y,z) = d^2((x,y,z), 0) = x^2 + y^2 + z^2.$

Esiste il minimo di f su S_a (distanza minima di un punto da un chiuso).

$$\min_{S_a} f.$$

Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; il punto di minimo è soluzione di

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla F_a \\ F_a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda a \\ 2z = -\lambda \\ x^2 + ay - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad x(\lambda - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Se $x = 0$: $\quad y = \frac{1}{2}\lambda a, \quad z = -\lambda/2 \quad$ da cui

$$\frac{1}{2}\lambda a^2 + \frac{\lambda}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{\lambda}{2}(a^2+1) = -1 \qquad \lambda = -\frac{2}{a^2+1}$$

quindi

$$x = 0, \qquad y = -\frac{a}{a^2+1}, \qquad z = \frac{1}{a^2+1}$$

Se $\lambda = 1$: $\quad y = a/2, \quad z = -1/2 \quad$ da cui

$$x^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2} + 1 = 0 \qquad \text{: nessuna soluzione reale.}$$

Allora il punto di minimo è

$$P_a = \left(0, -\frac{a}{a^2+1}, \frac{1}{a^2+1}\right).$$

Risulta:

$$\varphi(a) := f(P_a) = \frac{a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{1}{(a^2+1)^2} = \frac{1}{a^2+1}.$$

Il valore massimo di φ si ottiene chiaramente per $a = 0$.

T 1. Sia $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione f_0 è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; inoltre

$$f_0(\cdot, 0) \equiv 0 , \qquad f_0(x, \cdot) \equiv 0$$

Quindi f_0 ammette le derivate parziali anche nell'origine. Tuttavia non è differenziabile in $(0,0)$, poiché

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

e non esiste il limite di tale funzione per $(x,y) \to (0,0)$ (infatti, scritta in coordinate polari, è $\cos^2\theta \sin\theta$).

La funzione traslata

$$f_1(x,y) = f_0(x-1, y-1)$$

è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$ e ammette derivate parziali in $(1,1)$.

Allora

$$f_0 + f_1$$

soddisfa le condizioni richieste.

T 2. Sia $\gamma = (\varphi, \psi)$, con $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1.

Schematicamente: le equazioni

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

parametrizzano la curva; se, ad esempio, $\varphi'(t_0) \neq 0$, allora in un intorno di t_0 possiamo esprimere t in funzione di x dalla prima equazione

$$t = \varphi^{-1}(x), \quad \text{con } \varphi^{-1} \text{ (inversa locale) di classe } C^1$$

allora

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Più formalmente: se $\varphi'(t_0) \neq 0$ esistono $\delta > 0$ e $\sigma > 0$ tali che

$$\varphi : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \qquad (\text{con } x_0 = \varphi(t_0))$$

è biettiva e con inversa C^1. Allora

$$\{ (\varphi(t), \psi(t)) : t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \} = \{ (x, \psi(\varphi^{-1}(x))) : x \in (x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \}.$$

T 3. La forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega_0(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

è chiusa, ma non esatta ($\int_{S^1} \omega = 2\pi \neq 0$). Pertanto la forma differenziale

$$\omega_1(x,y) = \omega_0(x-1, y-2)$$

è chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$. Ne segue che

$$\omega(x,y,z) = \omega_0(x-1, y-2)$$

è chiusa, ma non esatta su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,2,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

5.

i) $F > 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$, poiché per ogni (x,y) si valuta l'integrale di una funzione strettamente positiva su una palla.

ii) F è continua su $\mathbb{R}^2$; infatti, fissato $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$|F(x,y) - F(x_0,y_0)| \le \int_{B_1(x,y) \Delta B_1(x_0,y_0)} f \, dx\, dy$$

$$\le A \cdot |B_1(x,y) \Delta B_1(x_0,y_0)| \to 0 \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0),$$

dove A è un maggiorante di f su un aperto contenente $\overline{B_1}(x_0,y_0)$ (ad esempio su $B_2(x_0,y_0)$).

iii) $\displaystyle\lim_{|(x,y)| \to +\infty} F(x,y) = 0$.

Fissato $\varepsilon > 0$ sappiamo che esiste $M > 0$ tale che

$$|(x,y)| \ge M \implies f(x,y) < \varepsilon.$$

Allora per $|(x,y)| \ge M+1$ risulta $f < \varepsilon$ su tutta la palla $B_1(x,y)$; allora

$$F(x,y) \le \varepsilon \, |B_1(x,y)| = \pi \varepsilon.$$

---

a) b)

Da (i) e (iii) segue che F non ha minimo su $\mathbb{R}^2$.

Da (i), (ii) e (iii) segue che F ha massimo su $\mathbb{R}^2$; infatti, posto $\gamma = F(0,0)$, sia M tale che

$$|(x,y)| \ge M \implies F(x,y) < \gamma.$$

Allora il massimo di F su $\overline{B}_M(0,0)$, che esiste per il teorema di Weierstrass e che vale almeno $F(0,0) = \gamma$, è massimo per F su tutto $\mathbb{R}^2$.

c) $$f(x,y) = e^{-x^2-6x-y^2-8y} = e^{-(x-3)^2-(y-4)^2+25} = \alpha\, e^{-[(x-3)^2+(y-4)^2]}, \quad \alpha = e^{25}$$

La funzione $f(x+3, y+4)$ ha simmetria radiale; pertanto il valore massimo di F su $\mathbb{R}^2$ si ottiene per $(x,y) = (3,4)$.