Tutorato di Analisi II

1. $\boxed{\text{Svolto}}$ Si consideri il problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t^2+t}{2e^{y(t)}+6e^{y(t)}}, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Determinare la soluzione locale y e se ne discuta la massimalità. Discutere la massimalità del medesimo problema, interpretato come problema di Cauchy *in avanti*.

2. Si studino, in un opportuno intorno di $t = 0$, la pendenza e la convessità della soluzione y del problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} y'(t) = 3\sin t + y(t)^2, \\ y'(0) = \pi. \end{cases}$$

3. $\boxed{\text{Svolto}}$ Si consideri il problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione in grande $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, e calcolare (se esiste)

$$\lim_{t\to\infty} y(t). \tag{1}$$

(b) Considerare il medesimo problema di Cauchy, ma con i dati iniziali

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

dove $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Si determini una condizione sufficiente su y_0, y_1 perché il limite (1) esista e valga 0.

4. Calcolare l'integrale generale y del problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \cos(2t), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

5. $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare l'integrale generale y del problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 3t + 2, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

6. Calcolare l'integrale generale y del problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = e^{-2t}, \\ y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

7. Sia (X, d) uno spazio metrico.

(a) Dimostrare che $A \subseteq X$ è aperto se e solo se ogni punto ammette un intorno aperto contenuto in A.

(b) Dimostrare che $A \subseteq X$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

8. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia (X, d) uno spazio metrico.

(a) Sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Mostrare che la mappa $x \mapsto d(x, x_0)$ è lipschitziana, cioè esiste $L \geq 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$, valga

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq L d(x, y).$$

(b) Sia $A \subseteq X$ un insieme non vuoto, e si definisca per ogni $x \in X$

$$\delta(x, A) \coloneqq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Dimostrare che $x \mapsto \delta(x, A)$ è lipschitziana, e verificare che

$$\overline{A} \equiv x \in X \mid \delta(x, A) = 0.$$

9. Si consideri lo spazio

$$X = C^0([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\},$$

dotato delle distanze

$$d_\infty(f, g) \coloneqq \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_1(f, g) \coloneqq \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx\,.$$

(a) Mostrare che d_∞, d_1 sono effettivamente distanze su X.

(b) Caratterizzare le rispettive palle unitarie centrate nella funzione nulla,

$$B_1^{(d_\infty)}(0), \qquad B_1^{(d_1)}(0).$$

(c) Si definisca per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione

$$[0,1] \ni x \mapsto f_k(x) := \max(0, 1 - kx) = \begin{cases} 1 - kx, & x \in [0, 1/k], \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare se la successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ converge nel senso della distanza d_∞, nel senso della distanza d_1, di nessuna delle due, o di entrambe.