Tutorato di Analisi II

1. Si discuta la continuità delle seguenti funzioni:

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ \dfrac{\pi}{2}, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x,y) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(c) $\boxed{\text{Svolto}}$ $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$h(x,y) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(d) $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$q(x,y) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^x \sin\left(\frac{\pi}{4}+xy\right)}{2x^2+y^2};$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\ln(x)}{(x-1)^2+y^2}.$$

3. Si dimostri che i seguenti limiti *non* esistono:

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{-y/x};$$

(b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}.$$

4. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $B \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme:

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 0\},$$

e sia $f : B \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + xy}.$$

Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$$

5. $\boxed{\text{Svolto}}$ (*Lemma di Urysohn.*) Sia (X,d) uno spazio metrico, e sia $(x_n)_n \subseteq X$ una successione. Si dimostri l'equivalenza delle seguenti condizioni:

1. $(x_n)_n$ converge a $\bar{x} \in X$;
2. Ogni sottosuccessione di $(x_n)_n$ ammette una sotto-sottosuccessione convergente a $\bar{x} \in X$.

6. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $\bar{x}$ un punto fissato di $\mathbb{R}^d$.

(a) Se $C \subseteq \mathbb{R}^d$ è un insieme chiuso, dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in C$ che realizza la minima distanza di $\bar{x}$ da C, cioè per il quale

$$|x_0 - \bar{x}| = \min_{x \in C} |x - \bar{x}|.$$

(b) Per ciascuna delle seguenti proprietà, si esibisca (se esiste) un insieme chiuso C che la soddisfa:

i. C ammette esattamente $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ punti a minima distanza da $\bar{x}$;

ii. C ammette un'infinità non numerabile di punti a minima distanza da $\bar{x}$;

iii. C ammette un'infinità numerabile di punti a minima distanza da $\bar{x}$.

(c) (*Proiezione su un convesso.*) Dimostrare che se C è chiuso e convesso, allora ammette un *unico* punto x_0 a minima distanza da $\bar{x}$.

7. Sia (X,d) uno spazio metrico, e siano $A, B \subseteq X$ due sottoinsiemi compatti disgiunti. Dimostrare che esistono due aperti disgiunti $U, V \subseteq X$ tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.