Tutorato di Analisi II

1. Si consideri l'insieme

$$A \coloneqq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq -\frac{x^2}{2} \right\},$$

su cui è definita la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$f(x, y) \coloneqq \ln\Big(1 + \sqrt{x^2 + 2y}\Big).$$

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Determinare l'immagine $\mathrm{Im}(f)$ e descrivere le curve di livello

$$\Gamma_f(c) \coloneqq \{(x, y) \in A \ : \ f(x, y) = c\},$$

al variare di $c \in \mathrm{Im}(f)$.

(b) $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare il gradiente ∇f nel punto $(2, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f sopra lo stesso punto.

(c) $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia (x, y) un punto interno ad A, e sia $\boldsymbol{u}$ un versore. Calcolare la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, y) \tag{1}$$

nei seguenti casi:

i. $\boldsymbol{u}$ è un versore normale alla curva di livello passante per (x, y);

ii. $\boldsymbol{u}$ è un versore tangente alla medesima curva di livello.

(d) Detti $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$ due scelte di versori come nei punti precedenti, calcolare la derivata direzionale (1) lungo il versore

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}}{\sqrt{2}},$$

e confrontarne il modulo con $|\nabla f(x, y)|$.

(e) $\boxed{\text{Svolto}}$ Se invece $(x, y) \in \partial A$, dimostrare che la derivata direzionale di f calcolata lungo l'opportuno versore normale a ∂A in (x, y) diverge.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$f(x, y, z) \coloneqq \exp\big(x^2 - y^3 + 2z^3\big) + \pi.$$

Individuare il versore $\boldsymbol{u}$ che rende massima la derivata direzionale $\partial f / \partial u\,(1, 1, 1)$, e scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di livello cui appartiene $(1, 1, 1)$.

3. Siano $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ date dalle formule

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(x,y) &:= \big(x\sin(y) + 3y, 2 + x^3, y - x + 1\big)\,, \\ \boldsymbol{g}(x,y,z) &:= \big(x + y, y^2 - z^2\big)\,. \end{aligned}$$

(a) Valutare la matrice Jacobiana $\mathrm{D}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(0,0)$ e calcolarne il determinante.

(b) Scrivere lo sviluppo di Taylor al prim'ordine di $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ intorno all'origine, con resto di Peano.

(c) (*Matematici.*) Calcolare la matrice Hessiana $\mathrm{H}(g_2 \circ \boldsymbol{f})(0,0)$, dove g_2 indica la seconda componente cartesiana della funzione $\boldsymbol{g}$, e scrivere lo sviluppo di Taylor al prim'ordine di $g_2 \circ \boldsymbol{f}$ intorno all'origine, con resto di Lagrange.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3xy^2 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Discutere le seguenti affermazioni:

(a) f è continua in $(0,0)$;

(b) f ammette derivate parziali in $(0,0)$ (nel caso, calcolarle);

(c) f è differenziabile in $(0,0)$.

5. (a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in ogni intero e discontinua in ogni altro punto.

(b) $\boxed{\text{Svolto}}$ Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in ogni punto di coordinate intere, cioè in ogni punto dell'insieme

$$\mathbb{Z}^2 = \{(m,n) \in \mathbb{R}^2 \mid m,n \in \mathbb{Z}\},$$

e discontinua in ogni altro punto.

(c) Costruire una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e derivabile, ma non differenziabile, in ogni punto di $\mathbb{Z}^2$, e discontinua in ogni altro punto.