Tutorato di Analisi II

1. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dimostrare che f è differenziabile ovunque.

(b) Controllare se f è di classe C^2.

2. (*Potenziale di Higgs.*) Siano $\lambda, \mu > 0$, e sia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$V(x) = -\mu|x|^2 + \lambda|x|^4.$$

Individuare i punti critici di V, stabilendo se costituiscono punti di massimo o minimo, stretto o largo, locale o globale.

3. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $\Omega \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; xyz \neq 0\}$, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione data dalla formula

$$f(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

(a) Dimostrare che gli unici punti critici per f sono $\xi_* \coloneqq (1,1,1)$ e $-\xi_*$.

(b) Stabilire se $\pm\xi_*$ sono punti di estremo locale o globale, stretto o largo, o punti di sella, e scrivere esplicitamente la forma quadratica $Q(h)$ associata alla matrice Hessiana di f nel punto ξ_*.

4. Determinare gli eventuali punti di estremo locale e globale delle funzioni $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date dalle seguenti formule:

(a) $f(x,y) \coloneqq \exp\big(x^4 - 4x^2y + 3y^2\big)$; (b) $g(x,y) \coloneqq |xy|(x + y - 1)$.

(c) $h(x,y) \coloneqq -|(x - x_0, y)| \cdot |(x, y - y_0)|$; (d) $q(x,y) \coloneqq \tanh\big((y - ax^2)(y - bx^2)\big)$.

In (c), $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è fissato, e $|\cdot|$ indica l'usuale modulo di un vettore in $\mathbb{R}^2$. In (d), $a, b > 0$ non sono necessariamente distinti.

5. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso assegnato, e sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione.

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Dimostrare che f soddisfa la *disuguaglianza di Jensen*

$$f\big(x_0 + \vartheta(x_1 - x_0)\big) \le f(x_0) + \vartheta\big(f(x_1) - f(x_0)\big),$$

per ogni $x_0, x_1 \in C$ e $\vartheta \in (0, 1)$, se e solo se il suo *epigrafo*

$$\operatorname{epi}(f) \coloneqq \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \le y\}$$

è un convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$. (Una qualunque di queste condizioni può essere presa come definizione di funzione convessa.)

(b) Dimostrare che, se f è convessa, allora per ogni $c \in \mathbb{R}$ il *sottolivello*

$$\Upsilon_f(c) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le c\}$$

è un insieme convesso.

(c) Dimostrare che non vale il viceversa, ovvero, costruire una funzione f non convessa tale che ciascuno dei sottolivelli sia un insieme convesso.

(d) Un sottolivello di una funzione convessa f è necessariamente limitato? In caso affermativo, dimostrarlo; altrimenti, esibire un controesempio.

(e) Dimostrare che, se f è convessa e ammette un punto di minimo assoluto, allora l'insieme dei suoi punti di minimo assoluto è un convesso.

(f) $\boxed{\text{Svolto}}$ Determinare tutte le funzioni f contemporaneamente convesse e concave.