Tutorato di Analisi II

1. Si consideri la famiglia $\mathscr{P}$ dei parallelepipedi inscritti nella sfera unitaria Σ di $\mathbb{R}^3$.

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Determinare gli elementi di $\mathscr{P}$ aventi volume massimo.

(b) Determinare quelli di area superficiale massima.

2. $\boxed{\text{Svolto}}$ Si consideri una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di classe C^1, e siano $x', x'' \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ due punti che soddisfano la seguente condizione: esiste un aperto $\omega \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\omega \cap \Sigma \neq \varnothing$, e per ogni $x \in \omega \cap \Sigma$, i segmenti $[x', x]$ e $[x, x'']$ intersecano Σ solamente in x.

(a) (*Legge di Erone–Alhazen.*) Sia definita la funzione *cammino ottico*

$$\mathscr{C} : \Sigma \to \mathbb{R} : x \mapsto |x - x'| + |x - x''|.$$

Dimostrare che, se $x \in \omega \cap \Sigma$ è stazionario per $\mathscr{C}$, allora lo *spazio normale* $N_x\Sigma$ (contenente i vettori ortogonali a Σ in x) giace nel piano descritto dai vettori $x - x', x - x''$, e questi ultimi formano con $N_x\Sigma$ il medesimo angolo ϑ.

(b) (*Legge di Ibn Sahl–Snell.*) Supponiamo ora che $\omega \cap \Sigma$ sia l'insieme di annullamento di una funzione $g \in C^1(\omega)$, e che per ogni $x \in \omega \cap \Sigma$ valgano le seguenti condizioni:

$$\forall y \in [x', x] \cap \omega \quad g(y) \geq 0, \qquad \forall y \in [x, x''] \cap \omega \quad g(y) \leq 0.$$

Sia inoltre definita la funzione *tempo ottico*

$$\mathscr{T} : \Sigma \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{|x - x'|}{v'} + \frac{|x - x'|}{v''},$$

dove $v', v'' > 0$ sono valori fissati. Dimostrare che, se $x \in \omega \cap \Sigma$ è stazionario per $\mathscr{T}$, allora $N_x\Sigma \equiv \operatorname{span}\{\nabla g(x)\}$ giace nel piano descritto dai vettori $x - x', x - x''$, e detti ϑ' e ϑ'' gli angoli formati con $N_x\Sigma$ da $x - x'$ e $x - x''$ rispettivamente, vale la relazione

$$v'' \sin \vartheta' = v' \sin \vartheta''.$$

3. Siano $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ due curve regolari compatte e disgiunte. Dimostrare che esiste un segmento perpendicolare a entrambe.

4. Sia $\omega > 0$. Tra le soluzioni dell'equazione differenziale $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$ che soddisfano

$$\int_0^{\pi/\omega} u'(t)^2\,dt = \frac{\pi\omega}{2},$$

trovare quella che rende massimo l'integrale

$$\int_0^{\pi/3\omega} u(t)\,dt\,.$$

5. $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vettore fissato. Determinare i punti x^+, x^- rispettivamente di massimo e di minimo per la funzione $p(x) := x \cdot y$ sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, e dedurre la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

6. Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica ($n > 1$), e sia $u \in \mathbb{R}^n$ un suo autovettore. Dimostrare che, perché $v \in \mathbb{R}^n$ sia punto di minimo per $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto q(x) := {}^{\mathrm{t}}xAx$ sull'ipersuperficie

$$\Theta := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \cdot u = 0,\ |x| = 1\},$$

è necessario che v sia un autovettore di A.