Tutorato di Analisi II

1. (a) Svolto Sia $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e $\alpha \in \mathscr{A}^1(\Omega)$ data dalla formula

$$\alpha_{(x,y)} := -\frac{y(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x(x^2+xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,.$$

i. Dimostrare che α è chiusa in Ω.

ii. Mostrare che α *non* è esatta su Ω calcolandone l'integrale lungo la frontiera ∂Q del quadrato $Q = [-1,1]^2$, orientata in senso antiorario.

(b) Siano ora $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, e sia $\varphi : \Omega' \to \Omega$ una funzione di classe C^1.

- Se $f \in C^1(\Omega)$, chiamiamo *pullback lungo* φ *di* f la funzione

$$\varphi^* f := f \circ \varphi \in C^1(\Omega');$$

- Se $\omega \in \mathscr{A}^1(\Omega)$ è una forma differenziale di classe C^1, chiamiamo *pullback lungo* φ *di* ω la forma $\varphi^*\omega \in \mathscr{A}^1(\Omega')$ definita nel seguente modo:

$$(\varphi^*\omega)_u[h] = \omega_{\varphi(u)}\big[d\varphi_u[h]\big], \qquad \forall u \in \Omega',\ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

i. Svolto Dimostrare

$$d(\varphi^* f) = \varphi^*\,df\,, \qquad \forall f \in C^2(\Omega).$$

(Vale a dire, il pullback di una forma esatta è una forma esatta.)

ii. Svolto Sia $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e $\psi : \Omega'' \to \Omega'$ di classe C^1. Dimostrare

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega), \qquad \forall \omega \in \mathscr{A}^1(\Omega).$$

iii. Sia C un cammino contenuto in Ω'. Dimostrare

$$\int_{\varphi[C]} \omega = \int_C \varphi^*\omega, \qquad \forall \omega \in \mathscr{A}^1(\Omega),$$

con l'intesa che $\varphi[C]$ sia il cammino il cui sostegno è l'immagine di C sotto φ, orientato compatibilmente a C e φ.

iv. Svolto Per $1 \le j \le n$, calcolare la j-esima componente di $\varphi^*\omega$ rispetto alla base canonica $(du_j)_{j=1}^n$.

v. Supponendo che $\varphi \in C^2(\Omega'; \Omega)$ sia invertibile con inversa C^2, dimostrare che una forma $\omega \in \mathscr{A}^1(\Omega)$ è chiusa (rispettivamente, esatta) se e solo se $\varphi^*\omega \in \mathscr{A}^1(\Omega')$ è chiusa (risp., esatta).

(c) Torniamo all'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e alla forma $\alpha \in \mathscr{A}^1(\Omega)$ introdotti in (a). Posto $\Omega' := (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$, si definisca $\varphi : \Omega' \to \Omega$ mediante la formula

$$\varphi(\rho, \theta) := (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta), \qquad \forall(\rho, \theta) \in \Omega'.$$

i. $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare il pullback lungo φ della forma α.

ii. Mostrare che $\varphi^*\alpha$ è esatta su Ω' e costruirne un potenziale globale.

iii. Servirsi del potenziale di $\varphi^*\alpha$ trovato in (c)ii. per costruire esplicitamente un potenziale di α sul semipiano $\{x > 0\}$. Qual è il dominio massimale di definizione di questo potenziale?

2. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si chiama *indice di avvolgimento* di un cammino chiuso orientato $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ attorno a (x_0, y_0) il valore

$$\mathscr{W}_C(x_0, y_0) := \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{-(y - y_0)\, dx + (x - x_0)\, dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right).$$

(a) Dimostrare che $\mathscr{W}_C(x_0, y_0)$ è un numero intero per ogni scelta di C.

(b) Si indichi con $A_r(\theta_1 \to \theta_2)$ l'arco di circonferenza di centro $(0, 0)$, raggio $r > 0$, ed estremi che formano angoli distinti $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ con il semiasse delle x positive (con l'intesa che il verso di percorrenza sia antiorario se $\theta_1 < \theta_2$, e orario altrimenti). Definito il circuito

$$\begin{aligned} C := A_1\left(-\pi \to \frac{\pi}{4}\right) + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)\right] + A_4\left(\frac{\pi}{4} \to 0\right) + [(4, 0), (2, 0)] \\ + A_2\left(2\pi \to \frac{\pi}{2}\right) + [(0, 2), (0, 3)] + A_3\left(\frac{\pi}{2} \to -\pi\right) + [(-3, 0), (-1, 0)], \end{aligned}$$

calcolare $\mathscr{W}_A(0, 0)$.

(c) Calcolare l'indice di avvolgimento attorno ai punti $(\pm 1, 0) \in \mathbb{R}^2$ del cammino poligonale orientato P così definito:

$$\begin{aligned} P := \big[&(0, 0), (1, 1), (2, 1), (2, -2), (-3, -2), (-3, 3), (-1, 3), \\ &(0, 0), (1, -3), (3, -3), (3, 2), (-2, 2), (-2, -1), (-1, -1), (0, 0)\big]. \end{aligned}$$

Qui la notazione stenografica $[a, b, c, \ldots, z]$ identifica la concatenazione consecutiva dei segmenti orientati $[a, b], [b, c], \ldots, [y, z] \subset \mathbb{R}^2$.