Tutorato di Analisi II

1. Svolto Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ due campi vettoriali.

(a) Nell'ipotesi in cui $f, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ siano almeno di classe C^1 su Ω, dimostrare che valgono le seguenti regole del prodotto:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div}(\mathbf{u}),$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{rot}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \operatorname{rot}(\mathbf{v}).$$

(b) Nell'ipotesi in cui $f, \mathbf{u}$ siano almeno di classe C^2 su Ω, dimostrare che $\operatorname{rot}(\nabla f) \equiv \mathbf{0}$ e $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \equiv 0$ identicamente su Ω.

2. Svolto Detto Ω lo spazio $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z, siano definiti i campi vettoriali $\mathbf{R}, \mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mediante le formule

$$\mathbf{R}(x, y, z) \coloneqq \frac{x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \mathbf{F}(x, y, z) \coloneqq \frac{-y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

(a) Calcolare divergenza e rotore di $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{F}$.

(b) Definito il nuovo campo $\mathbf{T} \coloneqq \mathbf{F} \times \mathbf{R} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, calcolare $\operatorname{div} \mathbf{T}$.

3. Sia $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ un punto fissato.

(a) Calcolare il laplaciano del campo scalare

$$g_\ell : \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{x}'\} \to \mathbb{R} : g_\ell(\boldsymbol{x}) \coloneqq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^\ell$$

al variare di $\ell \in \mathbb{Z}$.

(b) Calcolare la divergenza del campo vettoriale

$$\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{w}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'.$$

4. Dimostrare che il campo vettoriale

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3 \mapsto \frac{3x_3\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^5} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{|\boldsymbol{x}|^3}$$

è solenoidale ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$) e irrotazionale ($\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0}$). Possiamo concludere che $\mathbf{B}$ è conservativo (ovvero, esiste un campo scalare $\psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{B} = -\nabla\psi$)?

5. Sia $\Omega' := (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$, e si consideri la funzione $\mathbf{\Phi} : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ che implementa le coordinate sferiche sulla sua immagine $\Omega := \mathbf{\Phi}[\Omega']$:

$$\mathbf{\Phi}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta), \qquad \forall(\rho,\theta,\varphi)\in\Omega'.$$

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Fissato $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)\in\Omega'$, disegnare le superfici di Ω individuate volta per volta dalle seguenti equazioni in Ω':

$$\rho = \rho_0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad \varphi = \varphi_0.$$

(b) Calcolare le *funzioni costituenti* $h_\rho, h_\theta, h_\varphi : \Omega' \to \mathbb{R}$ definite mediante le formule

$$h_\rho(\boldsymbol{u}) := \left|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\rho}(\boldsymbol{u})\right|, \qquad h_\theta(\boldsymbol{u}) := \left|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\theta}(\boldsymbol{u})\right|, \qquad h_\varphi(\boldsymbol{u}) := \left|\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi}(\boldsymbol{u})\right|, \qquad \forall\boldsymbol{u}\in\Omega'.$$

(c) Scrivere, al variare di $\boldsymbol{u} = (\rho,\theta,\varphi)\in\Omega'$, i cosiddetti *versori delle coordinate sferiche* nel punto $\boldsymbol{x} := \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u})\in\Omega$:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{h_\rho(\boldsymbol{u})}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\rho}(\boldsymbol{u}), \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{h_\theta(\boldsymbol{u})}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\theta}(\boldsymbol{u}), \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{h_\varphi(\boldsymbol{u})}\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\varphi}(\boldsymbol{u}).$$

i. Anche aiutandosi con un disegno, esplicitare le componenti cartesiane dei campi vettoriali $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ nelle variabili $(x,y,z)\in\Omega$.

ii. Calcolare $(\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\rho}})(x,y,z), (\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\theta}})(x,y,z), (\operatorname{div}\hat{\boldsymbol{\varphi}})(x,y,z)$ al variare di $(x,y,z)\in\Omega$, ed esprimere in ciascun caso il risultato nelle variabili $(\rho,\theta,\varphi)\in\Omega'$.

(d) Mostrare che la terna di vettori $\big(\hat{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{x}), \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{x})\big)$ costituisce una base ortonormale positivamente orientata di $\mathbb{R}^3$ qualunque sia $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

(e) Siano $g : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{w} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo scalare e un campo vettoriale su Ω, rispettivamente, entrambi di classe C^1. (Adottiamo per semplicità le notazioni $\widetilde{f} := f\circ\mathbf{\Phi}$ e $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}\circ\mathbf{\Phi}$ per ogni campo scalare $f : \Omega\to\mathbb{R}$ e per ogni campo vettoriale $\mathbf{u} : \Omega\to\mathbb{R}^3$.)

i. Dimostrare

$$\widetilde{\nabla g} = \frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

ii. Decomposto $\mathbf{w} = w_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + w_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + w_\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, dimostrare

$$\widetilde{\operatorname{div}\mathbf{w}} = \frac{\partial\widetilde{w}_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{w}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{w}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2\widetilde{w}_\rho}{\rho} + \frac{\widetilde{w}_\theta}{\rho\tan\theta}.$$

iii. Dimostrare che, se g è almeno di classe C^2,

$$\widetilde{\Delta g} = \frac{\partial^2\widetilde{g}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{g}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\widetilde{g}}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2\tan\theta}\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial\theta}.$$