Esercizi di approfondimento, 20 marzo 2025

Esercizio 1. Si consideri, per $n \geq 1$, la consueta successione $\{f_n\}$ approssimante la funzione segno, definita da $f_n(x) = 1$ se $x \in [1/n, 1]$, $f_n(x) = -1$ se $x \in [-1, -1/n]$ e $f_n(x) = nx$ se $x \in (-1/n, 1/n)$. Sia $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ visto come sottoinsieme dello spazio di Banach $X = C^0([-1, 1])$ dotato della norma $\| \cdot \|_\infty$ "della convergenza uniforme". Dire se $\mathcal{F}$ è chiuso e se $\mathcal{F}$ è totalmente limitato.

Esercizio 2. Sia $(X, \| \cdot \|)$ uno spazio di Banach. Sia $\{x_n\}$ una successione in X. Dimostrare che, se la serie $\sum \|x_n\|$ converge in $\mathbb{R}$, allora la serie $\sum x_n$ converge in X (ovvero, definita $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$, si ha che $s_n \to s$ rispetto alla norma di X per un certo $s \in X$). Di quale risultato visto a lezione questo esercizio è una generalizzazione?

Esercizio 3. Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un compatto e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto tale che $K \subseteq \Omega$. Dimostrare che esiste $\delta > 0$ (di solito denominato "numero di Lebesgue") tale che per ogni $x \in K$ si ha che $B(x, \delta) \subset \Omega$.

Esercizio 4. Si consideri, per $x \in [0, +\infty)$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan e^{-x}}{(x-n)^2} & \text{se } x \neq n, \\ \pi/2 & \text{se } x = n. \end{cases}$$

Determinare il limite puntuale di f_n. Discutere quindi la convergenza uniforme di f_n su $[0, +\infty)$ e su un generico intervallo $[0, M]$ dove $M > 0$ è assegnato.

Esercizio 5. Stabilire in quali insiemi converge puntualmente, assolutamente e uniformemente la serie di funzioni

$$\sum (-1)^n \log \Big(1 + \frac{x + n^{1/3}}{n}\Big).$$

Esercizio 6. Si consideri, su $X = (0, 1]$, la distanza $\mathrm{d}(x, y) = |x^{-1} - y^{-1}|$. Dimostrare che $\mathrm{d}(\cdot, \cdot)$ è effettivamente una distanza e dire se (X, d) risulta o meno essere uno spazio metrico completo.