

Corso di Laurea in Scienze Biologiche  
Esame di Istituzioni di Matematiche  
**Programma per l'Anno 2005/06**

Giulio Schimperna

*Dipartimento di Matematica, Università di Pavia*

*Via Ferrata 1, 27100 – PAVIA*

E-mail: [giulio@dimat.unipv.it](mailto:giulio@dimat.unipv.it)

Homepage: <http://www-dimat.unipv.it/~giulio/istmat05.html>

Versione del **18 gennaio 2006**

**Premessa:** La presente nota costituisce una guida “ragionata” al programma svolto durante il corso di Istituzioni di Matematiche (corso B – Schimperna; per quanto riguarda il corso A – Nieri, possono esserci lievi differenze di impostazione, ma gli argomenti sono gli stessi). Tale programma è, nel seguito, suddiviso in “argomenti” (insiemi e funzioni, successioni, limiti di funzioni, ecc.). Per ciascuno di tali argomenti dapprima si descrive, riferendosi ai singoli paragrafi del libro di testo, quanto si è fatto (e va studiato), quanto si è saltato e quanto si è fatto, ma in modo diverso dal libro. Successivamente, per (quasi) ogni argomento, si riporta una “nota conclusiva” in cui si danno ulteriori suggerimenti utili (si spera) per lo studio. Inoltre, si evidenzia se sono state fatte delle aggiunte sostanziali rispetto al libro di testo e, nel caso, si dà una descrizione sommaria di tali aggiunte.

In questa nota, si descrive soltanto la parte “teorica” del programma, che contiene tutti gli strumenti per risolvere gli esercizi, ma nessun esercizio esplicitamente svolto (purtroppo il libro di testo è carente da questo punto di vista). Si raccomanda dunque di associare allo studio degli argomenti teorici una revisione degli esercizi (e degli esempi, spesso esplicativi delle definizioni e degli enunciati dei teoremi) svolti a lezione ed a esercitazione, nonché di svolgerne altri (se non si vuole acquistare un eserciziario, si ricorda che alcuni esercizi sono disponibili, anche sotto forma di temi d’esame, sulla pagina web del corso; altrimenti, anche un testo dell’ultimo anno delle scuole superiori può essere d’aiuto).

Occorre comunque tener presente che non è proibito studiare questa o quella parte

della materia in aggiunta o con un'impostazione diversa rispetto a quanto fatto a lezione. Infatti, questa guida ha solo il fine di fornire un aiuto a chi ha seguito il corso (per "raccordare" col libro" gli appunti presi a lezione) e a chi non lo ha seguito (e dunque ha bisogno di sapere su che cosa si è maggiormente insistito). Non la si interpreti in modo troppo "stringente" (evitare ad esempio di porsi domande del tipo: "questa riga del libro va fatta o va saltata?").

Ripeto anche che è possibile usare altri libri di testo per preparare l'esame o anche riferirsi a impostazioni o notazioni diverse, purché naturalmente il libro o l'impostazione scelta coprano i concetti fondamentali svolti a lezione (e necessari per risolvere gli esercizi della prova scritta).

Riguardo, infine, alle dimostrazioni presenti nel testo, ribadisco che non è obbligatorio conoscerle al momento della prova orale (anche se sapere e avere capito la dimostrazione di una certa proprietà o, ancora meglio, saperla ricavare, è sicuramente un punto a favore di chi si presenta alla prova orale). Tuttavia, è opportuno leggere almeno quelle più concettuali e meno tecniche, dato che possono fortemente aiutare nella comprensione degli argomenti. Per questo motivo, nel seguito si specifica su quali dimostrazioni è meglio soffermarsi e quali invece si possono "saltare" senza troppi problemi. Si ricorda, però, come monito conclusivo, che aver capito il "significato" delle definizioni e degli enunciati, e saperli illustrare con esempi concreti è cosa esplicitamente richiesta per della prova orale (vale a dire: non basta imparare a memoria definizioni ed enunciati).

## 1) Logica, insiemi, funzioni.

§1: studiare.

§2: studiare. A lezione gli assiomi sono stati numerati e "chiamati" in modo diverso, ma equivalente. Inoltre, l'assioma di completezza è stato presentato nella forma: "ogni insieme di  $\mathbb{R}$  superiormente limitato e non vuoto ammette estremo superiore". La (2.11) del testo è stata mostrata essere equivalente alla formulazione data.

§3: le "regole di semplificazione" sono state solo accennate (si è cioè detto solo che dagli assiomi di  $\mathbb{R}$  discendono le usuali regole dell'algebra). Studiare bene, invece, le conseguenze dell'assioma di completezza e la rappresentazione dei numeri reali su una retta orientata.

§4: studiare (non è stato introdotto l'"insieme quoziente").

§5: studiare (la Proposizione a p. 21 mi pare non sia stata dimostrata, ma leggerne la dimostrazione è comunque istruttivo).

§6: studiare molto bene. Importante.

§7: studiare molto bene (le funzioni monotone a lezione sono state introdotte più avanti, ma comunque fatte).

§8: studiare.

§9–10: studiare. È **molto** importante conoscere bene i grafici di tutte le funzioni elementari.

§11: saltare.

§12: studiare molto bene fino alla Figura 2.2. Limitarsi a leggere la parte successiva. Le definizioni di maggiorante, minorante, minimo, massimo, estremo superiore ed inferiore (dapprima date per un insieme e poi per una funzione) sono importantissime. (Si ricordi – vedi nota a §2 – che per noi la completezza di  $\mathbb{R}$  è stata introdotta proprio chiedendo l'esistenza del sup).

§13: fare solo la definizione di fattoriale.

§14–15: saltare.

**Nota conclusiva:** i cenni di logica introdotti durante la prima lezione non vengono normalmente chiesti all'esame; tuttavia, avere ben chiaro che cosa sono una proposizione, un teorema, una dimostrazione per assurdo, ecc., è necessario per capire il seguito del programma. È molto importante conoscere bene e sapere usare i quantificatori e i simboli che compaiono nella teoria degli insiemi. Inoltre, ripeto, è importantissimo conoscere per ciascuna delle funzioni elementari (potenze, trigonometriche, esponenziali, logaritmiche) il campo di esistenza e l'aspetto qualitativo del grafico.

## 2) Successioni.

§16: leggere.

§17: studiare bene. È opportuno leggere anche la dimostrazione dell'unicità del limite.

§18: studiare.

§19: studiare. È opportuno leggere anche la dimostrazione almeno della (19.1).

§20: studiare. È importante “capire” e saper usare le proprietà (20.1)–(20.7) che possono servire, tra l'altro, per gli esercizi.

§21: studiare.

§22: studiare.

§23: è opportuno conoscere i limiti notevoli qui introdotti, ma non è indispensabile saperli ricavare.

§24: studiare bene. È opportuno leggere anche la dimostrazione del teorema fondamentale sulle successioni monotone.

§25: limitarsi a leggere. Vanno però saputi i limiti (25.1), (25.3), (25.4) e occorre sapere trattare le forme indeterminate di tipo (25.9).

§26: saltare (vedi nota conclusiva).

§27–28: saltare (tuttavia il §28 può essere interessante da leggere per gli studenti incuriositi dagli aspetti teorici della materia).

**Nota conclusiva:** occorre avere chiaro l'uso delle “regole di confronto” tra infiniti di tipo potenza, esponenziale, logaritmico (servono per trattare le forme indeterminate di tipo  $\infty/\infty$ ). Queste regole sono accennate nel § 26; tuttavia, mi pare preferibile trattare il problema delle forme indeterminate (ed in particolare le “regole di con-

fronto”) con l’approccio usato a lezione.

### 3) Limiti di funzioni e continuità.

§29: leggere.

§30: studiare bene. Attenzione: la definizione di limite è stata data non nella forma di p. 95, ma come nel secondo membro della (30.12). La formulazione di p. 95, che è equivalente (come è dimostrato in § 31), può essere soltanto “guardata”. Importante è invece conoscere bene le (30.12)–(30.14) relative ai limiti infiniti e/o per  $x \rightarrow \infty$ .

§31: limitarsi a leggere l’enunciato del Teorema.

§32: studiare. Sul teorema sui limiti di funzioni composte a lezione si è insistito molto facendo anche un paio di esempi delicati.

§33: studiare bene. È importante sia conoscere la definizione di funzione continua sia sapere che le funzioni elementari sono “in generale” continue.

§34: studiare. La classificazione dei tipi di discontinuità data a lezione è forse in parte diversa, ma è la sostanza che conta, non i nomi.

§35: di questo paragrafo è importante conoscere bene (e avere capito) gli enunciati e sapere fare degli esempi (o dei controesempi – che sono stati fatti a lezione – che mostrano il ruolo delle varie ipotesi dei teoremi). Non è necessario conoscere le dimostrazioni, che in genere non sono del tutto banali (può comunque essere interessante leggerle per gli studenti più motivati e attenti agli aspetti teorici della materia). Dell’ultimo teorema di questo paragrafo è stata data una formulazione diversa, che “incorpora” anche i due ultimi teoremi del §38.

§36-37: saltare.

§38: studiare solo gli enunciati (vedi anche la nota al § 35).

### 4) Derivate, calcolo differenziale, applicazioni.

§39: leggere.

§40: studiare bene. Ovviamente, oltre a conoscere la definizione, occorre capire bene il significato “fisico” e geometrico della derivata (nonché del rapporto incrementale, della retta tangente e della retta secante).

§41: studiare le regole di derivazione e saperle applicare. Riguardo alle dimostrazioni, può essere utile una lettura almeno della prova della regola di derivazione del prodotto.

§42: è importantissimo sapere applicare con sicurezza la regola di derivazione delle funzioni composte. Le dimostrazioni, che sono state svolte a lezione, non sono del tutto semplici e possono essere saltate (se si leggono, va fatto bene, altrimenti è molto improbabile che si riesca a capirne la sostanza). Riguardo alla regola di derivazione della funzione inversa, vanno saputi l’enunciato e il “significato geometrico” (che è stato spiegato a lezione). È consigliabile riguardare le applicazioni (anch’esse svolte a lezione) di tale formula al calcolo delle derivate delle funzioni logaritmo ed arcotangente.

§43: bisogna conoscere le derivate delle funzioni elementari, ma non è essenziale sapere come si ricavano.

§44: studiare bene fino alla (44.6) (vedi nota a §40). Il seguito si può saltare.

§45: leggere. La funzione arcotangente è stata fatta “per bene”. Si è solo accennato ad arcsin e arccos.

§46: studiare bene. È opportuno per tutti almeno leggere la dimostrazione del Teorema di Fermat.

§47: studiare bene. È opportuno per tutti almeno leggere la dimostrazione del Teorema di Rolle (invece quella del Teorema di Lagrange si può saltare). Gli enunciati di Rolle e Lagrange vanno capiti bene e saputi spiegare tramite esempi. Occorre anche avere chiara l’interpretazione “geometrica” di questi teoremi.

§48: studiare e, soprattutto, sapere applicare negli esercizi. A lezione al primo enunciato di p. 147 è stato dato il nome di “Teorema della derivata nulla”. Può essere utile leggere anche le dimostrazioni (in particolare, a lezione si è insistito sul fatto che, ad esempio nel Criterio di Monotonia, una delle due implicazioni ha un senso “più profondo” dell’altra in quanto la dimostrazione sfrutta in modo essenziale, tramite il Teorema di Lagrange, la completezza di  $\mathbb{R}$ ).

§49: studiare solo definizione ed enunciati. L’interpretazione geometrica di convessità e concavità va saputa perché serve per svolgere gli studi di funzione.

§50: del Teorema di L’Hôpital va saputo (per bene – attenzione: è facile sbagliare la scrittura delle ipotesi!) l’enunciato. Inoltre, lo si deve sapere applicare negli esercizi (e si deve sapere anche quando invece *non si può* applicarlo). Leggere gli esempi di p. 154 può essere utile a questo scopo.

§51: in questo paragrafo non c’è niente da “studiare”, ma lo schema di p. 156 è quello che va usato negli esercizi (peraltro a lezione non si è insistito troppo sugli asintoti obliqui).

§52: studiare bene fino alla (52.18) (a lezione è stata fatta anche la dimostrazione della formula di Taylor di p. 160; ad ogni modo ci si può limitare a leggerla). Occorre, ovviamente, sapere usare la formula di Taylor per il calcolo dei limiti (specialmente per le forme indeterminate di tipo  $0/0$ ). A questo proposito, riguardare bene esempi ed esercizi fatti a lezione ed a esercitazione. Il criterio di pp. 162–163 è stato fatto a lezione col nome di “Criterio della derivata  $n$ -esima” e può avere qualche utilità negli esercizi. Tuttavia, non è tra gli argomenti “centrali” del corso.

§53: saltare.

§ da 54 a 60: saltare tutto il Cap. 7.

§ da 77 a 81: saltare tutto il Cap. 10.

## 5) Integrali.

§61: leggere bene (a lezione è stato fatto un esempio diverso. Ad ogni modo questo paragrafo dà una buona introduzione al concetto di integrale definito).

§62: studiare bene (saltando eventualmente, o limitandosi a leggere, le dimostrazioni dei due lemmi). Attenzione: la definizione di integrale definito, sul piano formale, è la più difficile del corso. Dunque, occorre soffermarsi per bene su questo paragrafo e, possibilmente, provare a ripetere (senza il testo davanti) la costruzione che porta alla definizione di integrale per essere certi di avere ben capito tutti i passaggi.

§63: studiare (e sapere le varie proprietà che vengono qui mostrate). È utile leggere anche le (facili) dimostrazioni.

§64: studiare. Bisogna conoscere l'interpretazione geometrica del teorema (e a questo scopo leggere la dimostrazione può essere utile).

§65: saltare.

§66: studiare l'enunciato. A lezione si è anche evidenziata l'integrabilità delle funzioni *monotone*.

§67–68–69: studiare. Sapere applicare con sicurezza la Formula Fondamentale del Calcolo Integrale per la risoluzione degli integrali definiti.

§70: guardare gli esempi.

§71: limitarsi a leggere. Gli esempi fatti a lezione, relativi a casi facili del procedimento, dovrebbero essere sufficienti per svolgere gli esercizi dei temi d'esame.

§72: sapere usare la formula di integrazione per parti.

§73: mi pare che l'approccio usato a lezione per introdurre la formula di integrazione per sostituzione sia più chiaro. Occorre, comunque, sapere risolvere gli integrali per sostituzione "diretta" (passare da  $f(t)$  a  $y$ , vedi appunti). Non occorre sapere usare il procedimento di sostituzione "inversa" (passare da  $y$  a  $f(t)$ ), che è più delicato.

§74: leggere.

§75: saltare.

§76: leggere.

**Nota conclusiva:** occorre distinguere i concetti di: integrale definito, funzione integrale, primitiva, integrale indefinito. Si tratta, infatti, di 4 "oggetti" ben diversi l'uno dall'altro. Occorre sapere bene come tali concetti sono legati l'uno all'altro (a lezione peraltro si è insistito molto su questo punto). Le formule di integrazione per parti e per sostituzione non richiedono praticamente alcuno studio di carattere "teorico". Tuttavia per imparare ad usarle correttamente negli esercizi serve (e si raccomanda) una certa pratica.

## 6) Serie.

§82: studiare, saltando il Criterio di Cauchy ed il Teorema del Resto.

§83: studiare.

§84: studiare.

§85: studiare, saltando il riquadro a p. 267. È utile almeno leggere la dimostrazione

a p. 266 della divergenza della serie armonica, che è stata fatta anche a lezione. La (analoga) dimostrazione per la serie armonica generalizzata può essere saltata (ma il comportamento di tale serie, vedi inizio p. 269, va saputo).

**§86:** studiare gli enunciati (salvo il “Criterio degli Infinitesimi”) e, soprattutto, saperli applicare negli esercizi. Non è necessario soffermarsi troppo sulle dimostrazioni (che, peraltro, a lezione, sono state almeno accennate). Attenzione: del criterio del confronto è stata fatta, a lezione, anche la versione asintotica, che si trova sulla dispensa di Bricchi.

**§87:** studiare solo l’enunciato (a lezione chiamato “Criterio di Leibniz”). A lezione è stato osservato con un esempio che la condizione di monotonia è essenziale.

**§88:** studiare solo l’enunciato (a lezione questo argomento è fatto prima del § 87).

**§89** saltare o limitarsi a leggere.

**Nota conclusiva:** è preferibile studiare le serie riferendosi almeno in parte alla dispensa di Bricchi disponibile sul sito web del corso e corredata, tra l’altro, di un buon numero di esempi ed esercizi svolti. Infatti, l’impostazione di tale dispensa è forse più aderente a quella adottata a lezione. Attenzione, però: le parti della dispensa che non corrispondono agli argomenti descritti qui sopra vanno **saltate**.

## 7 Equazioni differenziali.

**Nota conclusiva:** per questo argomento, non presente sul testo, si è seguita la dispensa disponibile sul sito web. Quest’anno non si è insistito troppo sulle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee (in particolare, la trattazione dei “secondi membri di tipo particolare” è stata svolta solo in casi “facili” e non in generale). Naturalmente, così come il libro di testo, anche la dispensa è povera di esempi ed esercizi. Si raccomanda pertanto di riguardare gli esercizi svolti a lezione e ad esercitazione.