Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 18 febbraio 2002

Esercizio 1. Data la famiglia di problemi di Cauchy

$$y_n' = (n+1)x^n \exp(y_n(x)), \qquad y_n(0) = 0,$$

calcolare esplicitamente le soluzioni $y_n(x)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ e determinarne gli intervalli *massimali* di esistenza. Determinare il più grande intervallo aperto I contenente 0 tale che

$$y_n \to 0 \qquad \text{uniformemente sui compatti di } I.$$

Esercizio 2. Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$$y'(x) = \log y(x) - x.$$

Esercizio 3. Determinare i punti di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = 2xy - x^3 \\ y' = -x^2 + y^2 - y \end{cases}$$

e studiarne la stabilità.

N.B.: Nello studio della stabilità di $(0,0)$ può essere utile cercare una funzione di Liapounov della forma $V(x,y) = x^2 + ay^2$ (per una scelta opportuna di $a > 0$).

Esercizio 4. Sia Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$ e sia $V \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$. Si consideri il sistema dinamico

$$\boldsymbol{y}' = -\nabla V(\boldsymbol{y}), \tag{1}$$

ove con $\nabla V(\boldsymbol{y})$ si è indicato il gradiente della funzione V nel punto $\boldsymbol{y}$. Determinare i punti di equilibrio del sistema (1) e determinare condizioni sufficienti affinché un equilibrio *isolato* $\overline{\boldsymbol{y}}$ di (1) sia rispettivamente:

– asintoticamente stabile,

– instabile.