

# Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 24 febbraio 2004

**Esercizio 1.** Determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo di tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = y^2(t) \sin t.$$

**Esercizio 2.** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' \sin t + y(1 + \cos t) = 2 \cos t + 2 \\ y(\pi/4) = 3 \\ y'(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

**Suggerimento.** Usare soluzioni “di prova”. Non occorre svolgere calcoli complicati.

**Esercizio 3.** (a) Studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = y(t) - \arctan t.$$

(b) Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$  una funzione **strettamente crescente**, **limitata** e tale che  $f(0) = 0$ . Dimostrare che esiste **uno e un solo** numero  $\lambda > 0$  tale che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - f(t) \\ y(0) = \lambda. \end{cases}$$

ammette limite finito per  $t \rightarrow +\infty$ . Trovare inoltre una formula esplicita che lega  $\lambda$  alla funzione  $f$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tale che  $f(0) = 0$ . Si consideri l'equazione differenziale

$$x'' + f(x)x' + x = 0. \tag{1}$$

(a) Posto  $y(t) := x'(t)$ , dimostrare che, se  $x = 0$  è un punto di minimo relativo per  $f$ , allora  $(x, y) = (0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico associato a (1).

(b) Dimostrare che se  $x = 0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ , allora  $(x, y) = (0, 0)$  non può essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema dinamico associato a (1). Potrebbe, in questo caso, essere stabile ma non asintoticamente?