Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Soluzioni prova scritta del 20 febbraio 2003

Esercizio 1. Si osservi innanzitutto che $y \equiv 0$ è soluzione stazionaria definita su tutto $\mathbb{R}$. Se $t_0 = 0$ e $y_0 > 0$, lo studio del segno di y' mostra che l'asse y è luogo di massimi. Pertanto, usando il criterio di nonmassimalità si mostra che tutte le soluzioni corrispondenti a $y_0 > 0$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Se $y_0 > 0$ e t_0 è qualsiasi, la situazione è più complessa. Risolvendo l'equazione a variabili separabili, si ha infatti:

$$y(t) = \frac{2}{t^2 + \left(\frac{2}{y_0} - t_0^2\right)};$$

studiando il denominatore, si vede che, se $0 < y_0 < 2/t_0^2$, allora la soluzione è ancora definita su tutto $\mathbb{R}$. Viceversa, se $y_0 \geq 2/t_0^2$ e, ad esempio, $t_0 > 0$, allora la soluzione è definita su un intervallo del tipo $(\alpha, +\infty)$, ove $\alpha \geq 0$ (e $\alpha = 0$ precisamente quando $y_0 = 2/t_0^2$). Una situazione analoga si ha per $y_0 \geq 2/t_0^2$ e, $t_0 < 0$.

Per quanto riguarda le soluzioni strettamente negative, è facile vedere che, per $-1 < y_0 < 0$ (e t_0 qualsiasi) la soluzione è ancora definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto compresa tra 2 soluzioni stazionarie ($y \equiv -1$ e $y \equiv 0$). Infine, per $y_0 < -1$ (e t_0 qualsiasi), la soluzione è strettamente crescente su tutto il suo dominio; dunque è sicuramente definita su $[t_0, +\infty)$. L'andamento esponenziale di f e l'analisi del segno di y' suggeriscono invece che debba essere

$$\lim_{t \to T^+} y(t) = -\infty \qquad \text{per qualche } T \in \mathbb{R}, \quad T < t_0.$$

Per dimostrare rigorosamente questo fatto, si può usare il teorema relativo al dominio della soluzione dell'equazione a variabili separabili, che fornisce come dominio di y l'insieme dei punti t tali che l'uguaglianza

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{e^s\, ds}{s(s+1)}$$

abbia senso per qualche $y < -1$. In effetti si vede subito che il range della funzione integrale a secondo membro quando y varia tra $-\infty$ e -1 è $(-\lambda, +\infty)$ per qualche $\lambda > 0$.

Infine, per quanto riguarda la regolarità, nonostante f non sia di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, il luogo di discontinuità della derivata f_y è l'asse t, che corrisponde alla soluzione stazionaria $y \equiv 0$ e non viene mai attraversato da alcun'altra soluzione. Pertanto, ogni soluzione è di classe C^∞.

Esercizio 2. Pongo $z := y'$ ed applico la formula risolutiva per il Problema di Cauchy relativo all'equazione lineare del primo ordine a coefficienti variabili. Ottengo con qualche conto (integrazione per sostituzione e poi per parti)

$$z(t) = y'(t) = 4e^{\sin t} - 2\sin t - 2.$$

Osservo che, quando t varia in $[0, +\infty)$, $\sin t$ varia tra -1 e 1. Si verifica facilmente che il valore minimo della funzione

$$w \mapsto 4e^w - 2w - 2, \qquad w \in [-1, 1],$$

è assunto per $w = -\log 2$ e vale $2\log 2 > 0$. Dal momento che

$$y(t) = 2 + \int_0^t \big(4e^{\sin s} - 2\sin s - 2\big)\, ds$$

e la funzione integranda è maggiore di una costante strettamente positiva, si ha subito che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

Esercizio 3. L'equazione corrisponde al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x - 5y + 8, \end{cases}$$

il cui unico punto critico è $(2, 0)$. Il metodo più semplice per procedere è quello di porre $z := x - 2$ e ricondursi al caso omogeneo. Procediamo comunque nel modo più complicato, ossia linearizziamo nell'intorno di $(2, 0)$ e otteniamo gli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -4$, cui corrispondono, rispettivamente gli autovettori

$$\boldsymbol{m}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{m}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $(2, 0)$ è nodo a due tangenti asintoticamente stabile. Per determinare l'andamento qualitativo delle traiettorie, il metodo più veloce è osservare che, partendo da un dato iniziale $\boldsymbol{P}_0 = (x_0, y_0)$ ed esprimendo questo nella forma $\boldsymbol{P}_0 = c_1\boldsymbol{m}^1 + c_2\boldsymbol{m}^2$, la corrispondente soluzione $\boldsymbol{P}(t) = (x(t), y(t))$ ha la forma

$$\boldsymbol{P}(t) = c_1(t)\boldsymbol{m}^1 + c_2(t)\boldsymbol{m}^2 = c_1e^{-t}\boldsymbol{m}^1 + c_2e^{-4t}\boldsymbol{m}^2,$$

da cui

$$c_2(t) = c_2c_1^{-4}c_1(t)^4.$$

Questo mostra che le traiettorie non rettilinee sono tangenti a $\boldsymbol{m}^1$ nell'origine.

È anche possibile, ma laborioso, risolvere l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 5y + 8}{y};$$

si noti che, se non si è fatta la traslazione, la sostituzione giusta è $v := (x - 2)y$, che trasforma la precedente in un'equazione a variabili separabili.

Esercizio 4. Ovviamente 0 è l'unico punto critico del sistema. Il metodo di linearizzazione e il metodo di Liapounov tuttavia non forniscono alcun aiuto. Pertanto conviene procedere direttamente allo studio delle traiettorie. Queste possono essere addirittura calcolate esplicitamente. Eliminando la variabile tempo, si ha ad esempio per $y \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2},$$

che è un'equazione a variabili separabili, che integrata fornisce il fascio di curve

$$y_k(x) = \sqrt[3]{x^3 + k}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Per comprendere il verso in cui tali curve sono percorse dalle traiettorie si può ad esempio disegnare il campo delle velocità. Si noti in particolare che, per $x_0 = y_0 < 0$, si ha una traiettoria rettilinea che si allontana dall'origine lungo la retta $y = x$. Dunque 0 è instabile. Ciononostante si noti che esistono traiettorie che, per $t \to +\infty$, tendono all'origine e precisamente tutte (e sole) quelle che originano da un dato della forma $x_0 = y_0 > 0$.