

Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 20 febbraio 2003

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t, y) := \begin{cases} -ty^2 & \text{se } y \geq 0 \\ (y+1)e^{-y}y & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini, al variare di (t_0, y_0) in \mathbb{R}^2 il dominio e la regolarità della corrispondente soluzione massimale.

N.B.: non è richiesto di valutare quantitativamente il valore del tempo finito in cui (eventualmente) esplose una soluzione.

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) \cos t = \sin(2t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Dire se esiste il $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 8.$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio del sistema dinamico associato e descrivere l'andamento qualitativo delle traiettorie (non è richiesto di determinarne l'espressione analitica).

Esercizio 4. Si consideri il sistema nonlineare autonomo

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = -x^2. \end{cases}$$

Determinare la stabilità dei punti di equilibrio e tracciare l'andamento qualitativo delle traiettorie.