Analisi Funzionale, M.G. Mora, a.a. 2017–18

Programma dettagliato del corso

Spazi normati. Richiami su spazi normati e su spazi di Banach. Distanze e norme topologicamente equivalenti. In dimensione finita tutte le norme sono tra loro topologicamente equivalenti. Teorema di Weierstrass-Stone (senza dim.). Ogni sottospazio di dimensione finita è chiuso. Richiami su spazi di Hilbert: disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, teorema di Pitagora, identità del parallelogramma. Isomorfismo tra spazi normati.

Operatori lineari e continui. Spazio duale algebrico e topologico. Caratterizzazione degli operatori lineari e continui. Se Y è spazio di Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ è spazio di Banach. Esempio di funzionale lineare non continuo. Nucleo di un operatore lineare e continuo. Iperpiani affini. Un funzionale lineare è continuo se e solo se il suo nucleo è chiuso.

Spazi di Banach. Teorema di Hahn-Banach: forma analitica (caso reale), forma analitica (caso complesso), prima e seconda forma geometrica. Teorema di Hahn-Banach: forma analitica forte (senza dim.). Unicità dell'estensione per spazi strettamente convessi. Funzionale di Minkowski. Conseguenze di Hahn-Banach: criterio di densità per sottospazi, caratterizzazione duale della norma. Se X' è separabile, allora X è separabile. Lemma di Baire. Ogni spazio di Banach di dimensione infinita è a base di Hamel più che numerabile. Teorema di Banach-Steinhaus. Teorema dell'applicazione aperta (senza dim.). Due norme complete e confrontabili sono topologicamente equivalenti. Teorema del grafico chiuso.

Spazi di successioni. Richiami sugli spazi ℓ^p, ℓ^∞, c, c_0, c_{00}: $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sono spazi di Banach, disuguaglianza di Hölder, rappresentazione del duale di ℓ^p per $1 \leq p < \infty$. Esempio di funzionale lineare e continuo su ℓ^∞ che non si rappresenta con un elemento di ℓ^1. Separabilità di ℓ^p, c e c_0. ℓ^∞ non è separabile.

Topologie deboli. Costruzione della topologia meno fine che rende continue le funzioni di una famiglia assegnata. Definizione di topologia debole. La topologia debole è T_2. Intorni deboli. Convergenza debole: caratterizzazione e proprietà. Un insieme convesso è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso. Lemma di Mazur. Una funzione convessa semicontinua inferiormente rispetto alla topologia forte è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia debole. Spazio biduale e immersione canonica. Definizione di topologia debole*. La topologia debole* è T_2. Intorni deboli*. Convergenza debole*: caratterizzazione e proprietà. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Se X è spazio di Banach separabile, $B_{X'}$ è debolmente* metrizzabile e debolmente* sequenzialmente compatta.

Spazi riflessivi. X è riflessivo se e solo se B_X è debolmente compatta (dim. solo dell'implicazione: X riflessivo $\Rightarrow$ B_X debolmente compatta). Ogni sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è riflessivo. X è riflessivo se e solo se X' è riflessivo. X è riflessivo e separabile se e solo se X' è riflessivo e separabile. Se X è riflessivo, allora

B_X è debolmente sequenzialmente compatta. Se X è riflessivo, ogni $f \in X'$ assume massimo su B_X. Se X è riflessivo, ogni convesso chiuso non vuoto ha elemento di minima norma. Spazi uniformemente convessi. Teorema di Milman-Pettis (senza dim.). In uno spazio uniformemente convesso convergenza debole e convergenza delle norme implicano convergenza forte.

Spazi L^p. Richiami di teoria della misura: Lemma di Fatou, Teorema della convergenza dominata, Teorema della convergenza monotona, Teorema di Fubini-Tonelli. Richiami sugli spazi L^p: disuguaglianza di Hölder, inclusioni naturali, disuguaglianza di interpolazione, L^p è spazio di Banach, Teorema di Lebesgue "alla rovescia", densità di $C_c^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$. L^p è riflessivo per $1 < p < \infty$. Teorema di Riesz di rappresentazione del duale di L^p per $1 < p < \infty$. $L^p(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < \infty$. Teorema di Riesz di rappresentazione del duale di L^1. $L^1(\Omega)$ non è riflessivo. $L^\infty(\Omega)$ non è riflessivo e non è separabile. Convergenza debole in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$. Convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$. Convoluzione di una funzione $L^1(\mathbb{R}^N)$ con una funzione $L^p(\mathbb{R}^N)$. Se $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^N)$ (senza dim.). Supporto di una convoluzione. Mollificatori di Friedrichs ρ_n. Se $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$, allora $f * \rho_n$ converge a f uniformemente sui compatti. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$, allora $f * \rho_n$ converge a f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Fréchet-Kolmogorov.

Spazi di Hilbert. Se H è uno spazio di Hilbert, allora H è uniformemente convesso, quindi riflessivo. Proiezione su un convesso chiuso. Proiezione su un sottospazio chiuso. Sottospazio ortogonale. Teorema della proiezione. Teorema di Riesz di rappresentazione del duale. Sistemi ortonormali. Disuguaglianza di Bessel. Teorema di Riesz-Fischer. Sistemi ortonormali completi e loro caratterizzazione. In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita sono equivalenti: H è separabile, esiste un sistema ortonormale completo, H è isometricamente isomorfo a ℓ^2. Forme bilineari continue, coercive e simmetriche. Teorema di Lax-Milgram. Richiami sulle funzioni assolutamente continue. Lo spazio di Sobolev $H^1(a,b)$. Applicazioni del Teorema di Lax-Milgram alla risoluzione di problemi ellittici con condizioni al bordo in dimensione uno.

Operatori compatti. $\mathcal{K}(X,Y)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X,Y)$. Gli operatori di rango finito sono compatti. Lemma di Riesz. Teorema di Riesz. Un operatore compatto manda successioni debolmente convergenti in fortemente convergenti. Operatore aggiunto e autoaggiunto. T è compatto se e solo se T' è compatto. Teorema dell'alternativa di Fredholm. Insieme risolvente, spettro e autovalori di un operatore lineare e continuo. Lo spettro di $T \in \mathcal{L}(H)$ è un insieme compatto ed è contenuto in $[-\|T\|, \|T\|]$. Proprietà dello spettro di un operatore compatto. Proprietà dello spettro di un operatore autoaggiunto. Teorema di diagonalizzazione per operatori compatti e autoaggiunti. Applicazione al problema di Sturm-Liouville.

Nota: nella prova scritta verrà richiesto di enunciare e dimostrare uno o più risultati tra quelli evidenziati in giallo, e di svolgere alcuni esercizi.