Integrali

1) Calcolare i seguenti integrali definiti:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin x\,dx$
- $\displaystyle\int_0^2 (x^3+3x^2+1)e^{-5x}\,dx$
- $\displaystyle\int_{-10}^{10} e^{x^2}\sin x\,dx$

2) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

- $\displaystyle\int \frac{\ln^2(4x+6)}{2x+3}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+3}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{x+12}{x^2+4x}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+3}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}\,dx$
- $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$
- $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$
- $\displaystyle\int x\sinh x\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx$
- $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$
- $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$

Funzione integrale

1) Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt.$$

Calcolare il polinomio di Taylor di F di grado 2 centrato in $x_0 = 1$.

2) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt}{x^3}.$$

3) Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{2e^t}{t^2+4}\, dt.$$

- Dimostrare che F è invertibile e calcolare la derivata della funzione inversa F^{-1} nel punto 0.
- Determinare gli intervalli di convessità e concavità di F.
- Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4) Si consideri la funzione $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le x \le 1, \\ 2 & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Calcolare esplicitamente F e stabilire se F è continua e derivabile.

Integrali impropri

1) Stabilire il comportamento dei seguenti integrali:

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+3x}{2+x^7}\, dx$
- $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2+1)\sqrt{x}}\,dx$

2) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\,dx$$

converge.

3) Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^2+x^4)^\beta}\,dx$$

converge.