

## Funzioni

- 1) Dimostrare che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni monotone crescenti, allora  $f \circ g$  è monotona crescente. Cosa si può dire nel caso in cui  $f$  è monotona crescente e  $g$  è monotona decrescente? E nel caso in cui  $f$  e  $g$  sono entrambe monotone decrescenti?
- 2) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione pari e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione dispari, si può concludere che  $f \circ g$  è pari o dispari? Cosa si può dire di  $g \circ f$ ?
- 3) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione pari e periodica di periodo 2. Sapendo che  $f(x) = -2x^2 + x + 1$  per ogni  $x \in [0, 1]$ , disegnare il grafico di  $f$  su tutto  $\mathbb{R}$ .
- 4) Siano  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni dispari. Dimostrare che la funzione  $f + g$  è dispari. Cosa si può dire della funzione prodotto  $fg$ ?
- 5) Trovare un esempio di una funzione dispari che non è monotona.
- 6) Una funzione pari può essere monotona? Giustificare la risposta.
- 7) Sia  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1 & \text{per } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dopo aver disegnato il grafico di  $f$ , stabilire se  $f$  è invertibile. In caso positivo, determinare l'espressione della funzione inversa  $f^{-1}$  e disegnarne il grafico.

- 8) Sia  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{per } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dopo aver disegnato il grafico di  $f$ , stabilire se  $f$  è invertibile. In caso positivo, determinare l'espressione della funzione inversa  $f^{-1}$  e disegnarne il grafico.

- 9) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + 2},$$

scrivere l'espressione di  $f \circ f$  e determinarne il dominio di definizione.

- 10) Determinare il dominio naturale di definizione delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x-2}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$