

Funzioni

- 1) Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni monotone crescenti, allora $f \circ g$ è monotona crescente. Cosa si può dire nel caso in cui f è monotona crescente e g è monotona decrescente? E nel caso in cui f e g sono entrambe monotone decrescenti?
- 2) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione pari e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione dispari, si può concludere che $f \circ g$ è pari o dispari? Cosa si può dire di $g \circ f$?
- 3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione pari e periodica di periodo 2. Sapendo che $f(x) = -2x^2 + x + 1$ per ogni $x \in [0, 1]$, disegnare il grafico di f su tutto \mathbb{R} .
- 4) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni dispari. Dimostrare che la funzione $f + g$ è dispari. Cosa si può dire della funzione prodotto fg ?
- 5) Trovare un esempio di una funzione dispari che non è monotona.
- 6) Una funzione pari può essere monotona? Giustificare la risposta.
- 7) Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1 & \text{per } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dopo aver disegnato il grafico di f , stabilire se f è invertibile. In caso positivo, determinare l'espressione della funzione inversa f^{-1} e disegnarne il grafico.

- 8) Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{per } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dopo aver disegnato il grafico di f , stabilire se f è invertibile. In caso positivo, determinare l'espressione della funzione inversa f^{-1} e disegnarne il grafico.

- 9) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + 2},$$

scrivere l'espressione di $f \circ f$ e determinarne il dominio di definizione.

- 10) Determinare il dominio naturale di definizione delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x-2}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}$