Limiti di funzioni e continuità

1) Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$
- $\lim_{x\to +\infty} (2^{2x} - x^4)$
- $\lim_{x\to -\infty} (2^{2x} - x^4)$
- $\lim_{x\to 0} (2|x| - 1)$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$
- $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-9}{x^2-1}$
- $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-9}{x^2-1}$
- $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}\right)$
- $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^3 - 1}{2x^3+x^2+1}\right)$
- $\lim_{n\to +\infty} (1 + e^{-\frac{1}{n}}) \arctan(n^2)$
- $\lim_{n\to +\infty} n \ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$
- $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-2x^2-3x^5}{2+x^3-x^4}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{-2x^3-3x^5}{x^3-x^4}$
- $\lim_{n\to +\infty} \left(e^{\sqrt{n}} - \sqrt{e^n}\right)$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x-1)}{\sin x - 1}$

2) Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{per } x > 0, \\ 3\cos x - 1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Stabilire se esiste

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

e in caso affermativo, calcolarlo.

3) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{per } x > 0, \\ \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Stabilire se esiste

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

e in caso affermativo, calcolarlo.

4) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x} - e^2}{x}.$$

5) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } x \leq 2, \\ x^2 - 3 & \text{per } x > 2, \end{cases}$$

è continua nel suo insieme di definizione.

6) Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{per } x > 0, \\ 1 & \text{per } x = 0, \\ \dfrac{x^2+1}{(x-3)^2} & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

è continua nel suo insieme di definizione. Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

7) Determinare il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{per } x \leq 3, \\ \log_2(x + \alpha) & \text{per } x > 3, \end{cases}$$

risulti continua nel suo insieme di definizione.

8) Determinare i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + \alpha & \text{per } x < 0, \\ x^2 + \beta x + 2\alpha + 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ 2\beta & \text{per } x > 1, \end{cases}$$

risulti continua nel suo insieme di definizione.

9) Determinare il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \text{per } x \geq 2, \\ e^{4x-\alpha} & \text{per } x < 2, \end{cases}$$

risulti continua nel suo insieme di definizione.

10) Determinare il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } -1 \leq x < 1, \\ x + \alpha & \text{per } 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

verifichi le ipotesi del Teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 3]$. Per tale valore di α disegnare il grafico di f e determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f nell'intervallo $[-1, 3]$.

11) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = 2^x - x^3$$

ha almeno uno zero nell'intervallo $[0, 2]$ (cioè, esiste $x_0 \in [0, 2]$ tale che $f(x_0) = 0$).