

Derivate

1) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- $\frac{1+x}{1-x}$
- $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
- $(\sin x)^3 \cos x$
- $\sin(\sqrt{x})$
- $\arctan x + \ln(2+x)$
- $x^2 + \arctan(2x+3)$
- $\ln(\ln x)$
- 2^{x^2}
- $\ln(x^4 + \sqrt[3]{e^x})$

2) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 2$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$.

3) Usando la definizione di derivata, mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$ e calcolare $f'(0)$.

4) Stabilire se la funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile in $x = 0$ e, in caso affermativo, calcolarne la derivata.

5) Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x + \ln x + e^x.$$

Dimostrare che f è strettamente crescente e che $f(0, +\infty) = \mathbb{R}$. Dimostrare che f è invertibile. Calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} nel punto $e + 1$.

6) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutti i punti di \mathbb{R} . Dimostrare che, se f è una funzione dispari, allora f' è una funzione pari. Dimostrare che, se f è una funzione pari, allora f' è una funzione dispari.