Studi di funzione

1) Disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$;
- $f(x) = \dfrac{|1 - \ln x|}{x}$;
- $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3}$;
- $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$.

Sviluppi di Taylor

1) Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 1 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è derivabile in $x = 0$ e calcolarne la derivata.

2) Usando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin x) - \sin x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{x}{\sin x} \right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-2x^2 + x^3 \ln \left(1 + \dfrac{2}{x} \right) \right)$
- $\lim\limits_{n\to +\infty} n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n+1} \right)$

3) Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $\sin x + \cos x = x + o(x)$ per $x \to 0$;
- $\sin x + \cos x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$;
- $e^{2x} - \cos(3x) = -x + o(x)$ per $x \to 0$;
- $e^{2x} - \cos(3x) = 2x + o(x)$ per $x \to 0$.

4) Sia f una funzione tale che $f(x) = x + o(x^4)$ per $x \to 0$. Stabilire quale delle due seguenti affermazioni è vera:

- $f^2(x) = x^2 + o(x^8)$ per $x \to 0$;
- $f^2(x) = x^2 + o(x^5)$ per $x \to 0$.

5) Scrivere:

- il polinomio di MacLaurin di grado 12 di $f(x) = \ln(1 + 3x^5)$;
- il polinomio di MacLaurin di grado 5 di $f(x) = \cos^2 x$;
- il polinomio di MacLaurin di grado 4 di $f(x) = e^x \sin(2x)$;
- il polinomio di MacLaurin di grado 3 di $f(x) = \arctan(e^x)$;
- il polinomio di Taylor di grado 3 di $f(x) = e^x$ centrato nel punto $x_0 = 2$;
- il polinomio di Taylor di grado 3 di $f(x) = \sin x$ centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.