Serie

1) Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$$
Dimostrare per induzione che la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è data da
$$s_n = -\ln 2 + \ln(n+1) + \ln(n+2) \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$
Dedurre il comportamento della serie.

2) Determinare il comportamento delle seguenti serie:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^5\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n^4}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2-1}{5n^7+3n^2+6}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2-1}{5n^3+3n^2+6}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

3) Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}\Big)^n$$

converge e per tali valori calcolarne la somma.

4) Calcolare la somma delle seguenti serie:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+4}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} 3^{n+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$

5) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)}.$$

6) Al variare del parametro $\alpha > 0$, studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \arctan(n^5) + 1 - n^3}{\alpha^n + 5n^2}.$$

7) Sia $\{a_n\}$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 1)$ converge;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 1)$ diverge;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5a_n$ converge;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-a_n)$ diverge.

8) Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge;
- se $a_n \geq 0$ per ogni n e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge;
- se $a_n \geq 0$ per ogni n e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge;
- se $a_n \leq b_n$ per ogni n e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
- se $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni n e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.