Equazioni differenziali di interesse ingegneristico e problemi modello su cui studiare i M.E.F.

Equazione dell'elasticità (lineare)

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 \quad \left(\text{oppure } = \rho \ddot{\underline{u}}\right) \quad \text{in } \Omega$$

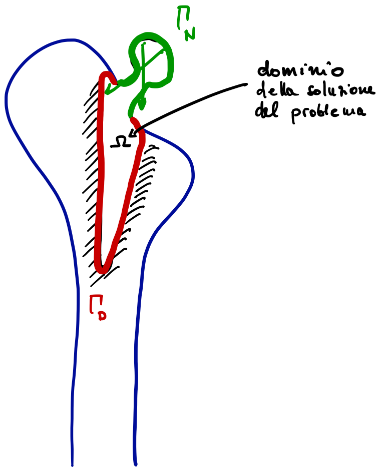
$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ = parte simmetrica del gradiente $= \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T\right)$

vettore degli spostamenti

condizioni al bordo $\quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = g \quad$ oppure $\quad \underline{u} = \underline{u}_0$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\right) = f & \text{in } \Omega \\ \underline{u} = \underline{0} & \text{su } \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \cdot \underline{n} = \underline{g} & \text{su } \Gamma_N \subset \partial\Omega \end{cases}$$



$\underline{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ è l'incognita

Problema di Poisson

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \Gamma_D \\ \underline{K \nabla u} \cdot \underline{n} = g & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

ora l'incognita è un campo scalare.

$u : \Omega \to \mathbb{R}$

- "semplificazione" del problema precedente
- eq. del calore
- equazione ellittica (parabolica / iperbolica)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \Big/ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \dots$$

Problema di Poisson in 2D

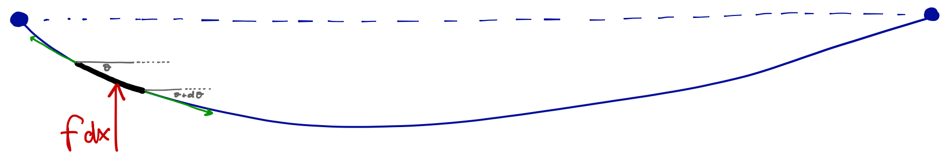
$$\begin{cases} -\overbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}^{\Delta u} = f & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Problema di Poisson in 1D

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Il problema di Poisson in 1D modellizza il comportamento elastico di una corda soggetta ad un carico verticale dove:

- la rigidezza flessionale si considera trascurabile
- t è il modulo della tensione (tangente alla corda)
- f è il carico verticale per unità di lunghezza
- θ è l'angolo formato dalla corda con l'orizzontale.



l'equilibrio nella direzione verticale risulta:

$$- t \cdot \sin\theta + t \sin(\theta + d\theta) + f\,dx = 0$$

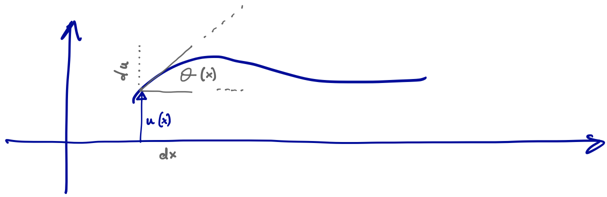
dato che $\sin\theta = \theta + O(\theta^3)$ assumendo piccole deformazioni è giustificata la linearizzazione $\sin\theta \simeq \theta$, e dunque

$$t(\theta + d\theta - \theta) + f\,dx = 0$$

$$- t \frac{d\theta}{dx} = f$$

Siccome ammettiamo piccole deformazioni, la lunghezza della corda varia di poco rispetto alla configurazione orizzontale e dunque consideriamo t dato costante indipendente dalla soluzione.

Il passaggio successivo consiste nell'esprimere $\theta(x)$ in funzione dello spostamento verticale $u(x)$



$$\theta(x) \cong \sin(\theta(x)) = \frac{du}{dx}(x)$$

In conclusione otteniamo $\displaystyle -k \frac{d^2u}{dx^2}(x) = f(x)$

con condizioni $u = 0$ agli estremi della corda.