Esercitazione su FEM in 1D

① Si consideri il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione (esatta) è $u(x) = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}$

Implementare in MATLAB il FEM (Finite element method) basato su approssimazione lineare a tratti su mesh uniforme con passo di discretizzazione h

Calcolare la soluzione numerica u_h e diagrammare u_h e u sullo stesso grafico, e la funzione $u-u_h$ in un altro grafico. Commentare il risultato ottenuto.

Calcolare l'errore $\|u - u_h\|_{L^2(0,1)}$

Valutare, dai risultati numerici ottenuti, quale è l'andamento dell'errore $\|u_{ex}-u_h\|_{L^2(0,1)}$ in funzione di h

② Si consideri il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(3\pi x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione (esatta) è $u(x) = \frac{1}{9\pi^2}\sin(3\pi x)$

Come è possibile approssimare il termine noto del FEM, e cioè

$$\left[\int_0^1 \sin(3\pi x)\, \varphi_i(x)\, dx \right]_{i=1,\dots,n_{dofs}}$$

utilizzando una formula di quadratura ?

Valutare, come nel caso precedente, l'andamento della soluzione in funzione di h

(3) Procedendo come nel caso precedente, implementare il FEM per risolvere problemi della forma

$$\begin{cases} -\left(k(x)\, u'(x)\right)' = f(x) & \text{in} \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Verificare il buon funzionamento del codice con una "manufactured solution".

(4) Risolvere con FEM il problema

$$\begin{cases} -u''(x) = e^{100 \cdot x} & \text{in} \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

utilizzando una discretizzazione $0 = x_1 < \dots < x_{n_v} = 1$ non uniforme. Sperimentare discretizzazioni più raffinate verso l'estremo destro dell'intervallo.

Suggerimento per l'utilizzo di formule di quadratura

Le funzioni da integrare, sia $u(x) - u_h(x)$ che le integrande $k(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x)$ oppure $f(x)\,\varphi_i(x)$, sono regolari a tratti, cioè regolari su ogni intervallo della suddivisione.

Si consideri dunque una partizione di $(0,1)$

$0 = x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; \cdots \;\; \cdots \;\; x_{n_{NODI}} = 1$ con $I_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n_{INTERVALLI}$.

e una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $g|_{I_i}$ sia regolare (ad esempio $\in C^\infty(I_i)$, ma anche meno regolare di C^∞).

In una situazione del genere è conveniente utilizzare una formula di quadratura composita, cioè:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n_{INTERVALLI}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n_{INTERVALLI}} Q_i(g)$$

dove Q_i è una formula di quadratura su I_i, ad esempio (dove $|I_i| = x_{i+1} - x_i$ = lunghezza di I_i)

$$Q_i(g) = |I_i| \cdot g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad \text{"punto medio"}$$

$$Q_i(g) = |I_i| \cdot \frac{1}{2}\left(g(x_i) + g(x_{i+1})\right) \qquad \text{"trapezi"}$$

$$Q_i(g) = |I_i| \cdot \frac{1}{6}\left(g(x_i) + 4\,g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + g(x_{i+1})\right)$$

"Cavalieri - Simpson"

Osservazione: quando si sommano i contributi elementari, ci sono semplificazioni soprattutto se la suddivisione è uniforme, cioè $\forall i \ |I_i| = h$. Nel caso della formula dei trapezi composita, per esempio:

$$\sum_i Q_i(g) = h\left(\tfrac{1}{2}g(x_0) + \tfrac{1}{2}g(x_1)\right) + h\left(\tfrac{1}{2}g(x_1) + \tfrac{1}{2}g(x_2)\right) + \dots$$
$$= h\left(\tfrac{1}{2}g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) + \dots + g(x_{n_v-1}) + \tfrac{1}{2}g(x_{n_v})\right)$$

La precisione della formula di quadratura dipende da h e dal suo grado di esattezza. Le formule del punto medio e dei trapezi sono esatte per polinomi lineari, la formula di Cavalieri-Simpson è esatta per polinomi quadratici, cioè

$$Q_i(p) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,dx \ , \quad \forall p \text{ polinomio } \begin{cases} \text{lineare} \\ \text{quadratico} \\ \dots \end{cases}$$

Precisione maggiore si ottiene ad esempio con formule Gaussiane. Una formula Gaussiana con n punti di integrazione è esatta per polinomi di grado $2n-1$. Per $n=1$ abbiamo la formula del punto medio. La figura di fianco riporta i pesi e nodi di quadratura per $I = (-1,1)$:

$$\int_I g(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i\, g(x_i)$$

Number of points, n	Points, x_i	Weights, w_i
1	0	2
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$