

Scale Logaritmiche



SCALA LOGARITMICA:

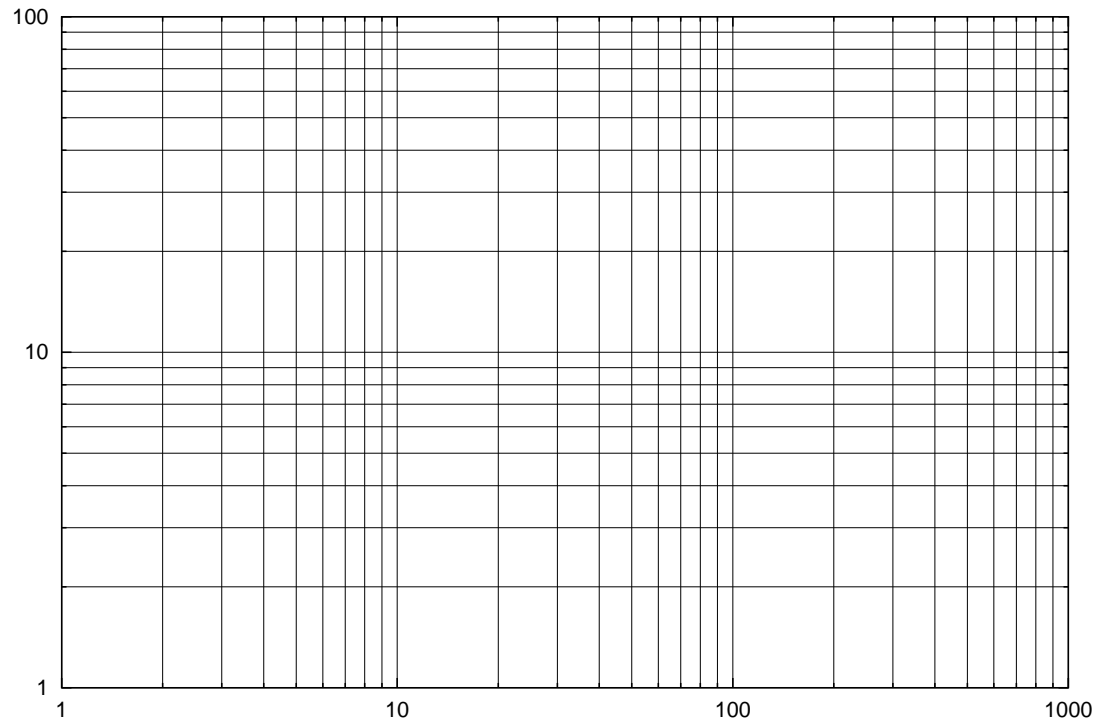
- sull'asse prescelto (*ad es. asse x*) si rappresenta il punto di ascissa $1 = 10^0$
- nella direzione positiva si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3, \dots$
- nella direzione negativa si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$
- i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva (*ad.es. 2, 3, \dots 9*) sono posizionati ai valori dei rispettivi logaritmi decimali



APPLICAZIONI:

- rappresentare misure *positive* con ordini di grandezza molto diversi fra loro
- linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ *scale semilogaritmiche*
- linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ *scale logaritmiche*

Carta Logaritmica



CARTA LOGARITMICA: scala logaritmica sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI: $X = \log_{10} x$ $Y = \log_{10} y$

Carte SemiLogaritmiche



data la funzione esponenziale

$$y = K \cdot a^x$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi

$$\Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} [K \cdot a^x] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

ponendo $X = x$ e $Y = \log_{10} y$

$$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$

Carte Logaritmiche



data la funzione potenza

$$y = K \cdot x^b$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi

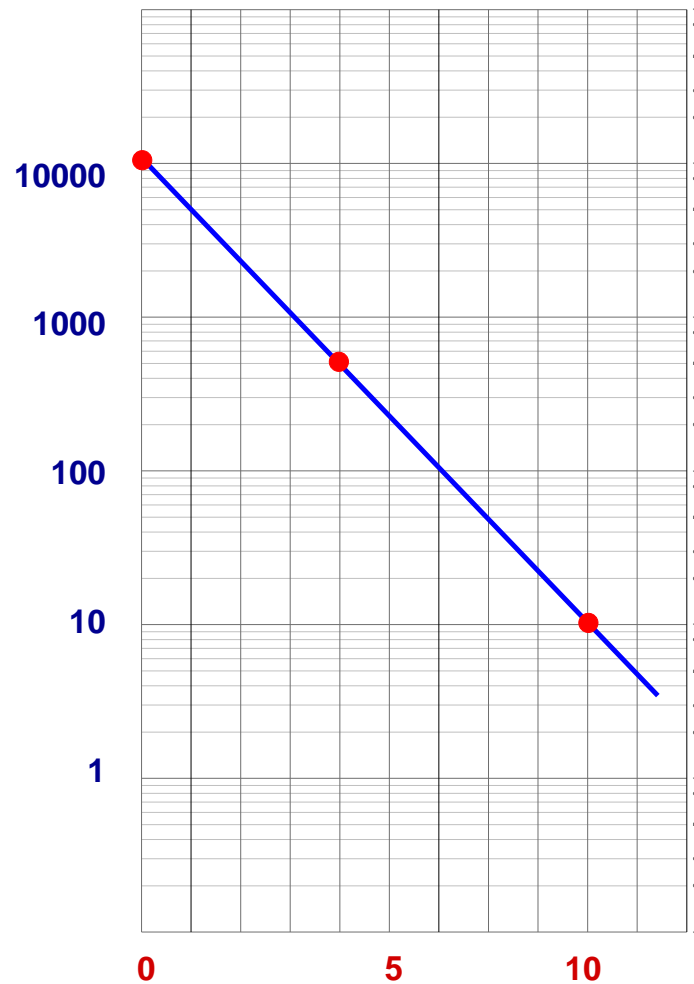
$$\Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} [K \cdot x^b] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + b \cdot \log_{10} x$$

ponendo $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$

$$Y = \log_{10} K + b \cdot X$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} K$

Carta SemiLogaritmica - Esempio



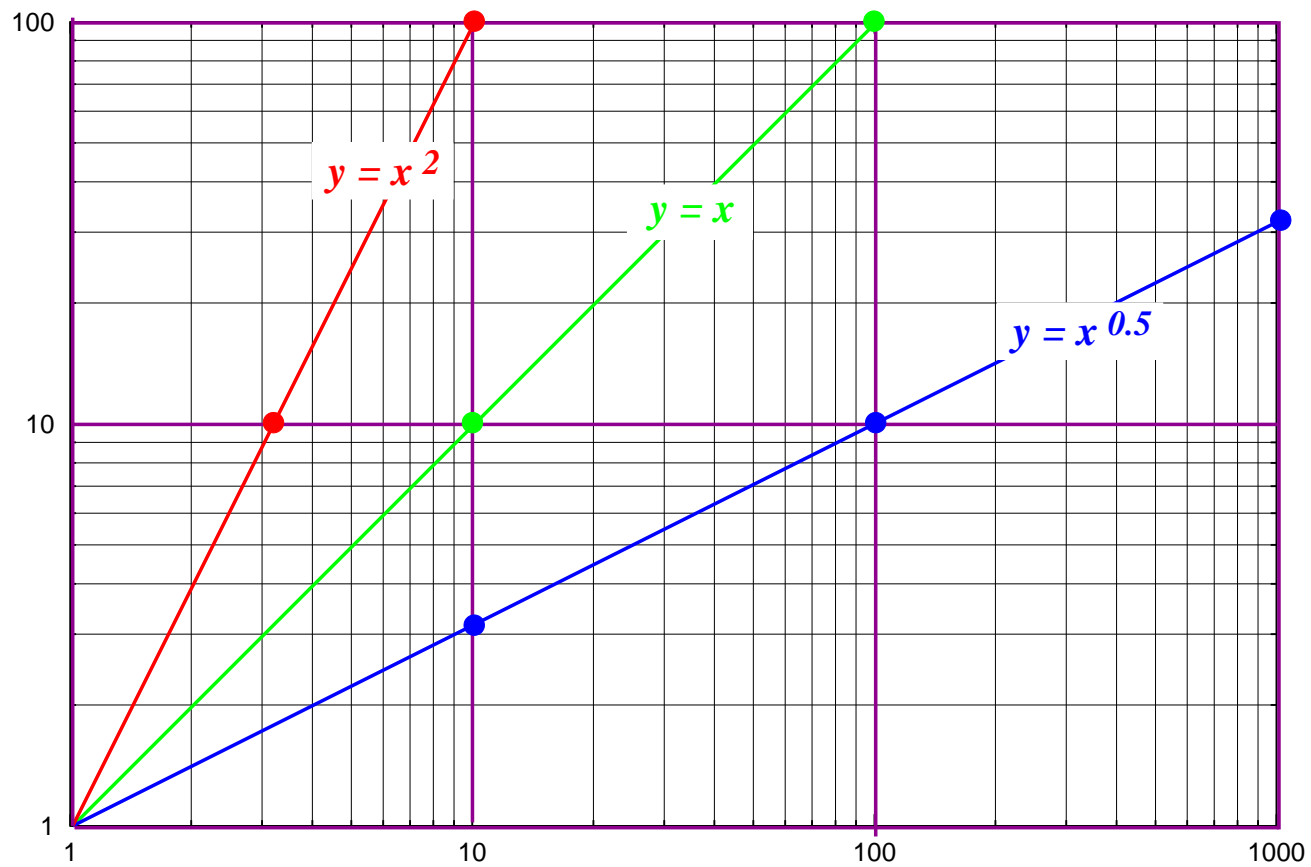
$$y = 10000 (0.5)^x$$

$$\text{Log } y = \text{Log}(10000) + x \text{Log}(0.5)$$

$$Y = 4 - (0.3) x$$

x	y	Y=Log y
0	10000	4
5	313	2.5
10	10	1

Carta Logaritmica - Esempio



Esercizi



ESERCIZIO 1 - In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 2 + (\log_{10} 3)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.

$$\log_{10} y = -\log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 3^x - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{3^x}{2}$$

SOLUZIONE : $y = \frac{3^x}{2}$

Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta, su tale scala, la funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

$$\log_{10} y = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x \cdot \log_{10} \frac{1}{3}$$

SOLUZIONE : $Y = \left[\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right) \right] x \quad m = -\log_{10} 3 < 0$

Esercizi



ESERCIZIO 2 - *In un grafico in scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 2 + (\log_{10} 3)x$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .*

$$\log_{10} y = \log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10}(2 \cdot 3^x)$$

SOLUZIONE : $y = 2 \cdot 3^x$

Rispondere alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + 2X$, dove $X = \log_{10} x$.

$$\log_{10} y = -\log_{10} 5 + 2 \log_{10} x = \log_{10} \frac{x^2}{5}$$

SOLUZIONE : $y = \frac{x^2}{5}$

Esercizi



ESERCIZIO 3 - Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)x$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x ed y .

Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$.



ESERCIZIO 4 - *In un grafico con scala logaritmica (scala logaritmica sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate)*

- *È rappresentata la retta di equazione $Y = -3X + 5$. Trovare il legame funzionale tra x e y dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.*
- *Scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = (\sqrt{2x})^3$.*

SOLUZIONE a: $\log_{10} y = -3 \log_{10} x + 5$ quindi $y = 10^{-3 \log_{10} x + 5} = 10^5 (10^{\log_{10} x})^{-3} = \frac{10^5}{x^3}$ cioè $y = \frac{100000}{x^3}$.

SOLUZIONE b: $\log_{10} y = \log_{10} (2x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 2x$ e quindi la retta è $Y = \frac{3}{2} X + \frac{3}{2} \log_{10} 2$.

Esercizi



ESERCIZIO 5 - In un grafico con scala semilogaritmica (scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate)

- È rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.
- Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

SOLUZIONE a: $\log_{10} y = x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2^x - \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{2^x}{5}$ da cui
 $y = \frac{2^x}{5}$

SOLUZIONE b: $\log_{10} y = \log_{10} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right) = x \log_{10} \left(\frac{3}{5}\right)$ cioè $Y = (\log_{10} \frac{3}{5})X$ e quindi il coefficiente angolare è $\log_{10} \left(\frac{3}{5}\right)$