Probabilità Condizionale - 1

Come varia la probabilità al variare della conoscenza, ovvero delle informazioni in possesso di chi la calcola?

ESEMPIO - Calcolare la probabilità che in una estrazione della tombola sia uscito il 9 o il 25, sapendo che è uscito un multiplo di 3.

Nella tombola i casi a priori possibili sono 90. L'informazione che il numero estratto è multiplo di tre riduce i casi possibili ai multipli di 3 tra 1 e 90, che sono esattamente 30. Inoltre solo il 9 è multiplo di 3, pertanto c'è un solo caso favorevole all'evento su 30 possibili ed equiprobabili, dunque la probabilità richiesta è 1/30.

PROBABILITÀ CONDIZIONALE - Dati due eventi A, B, si definisce probabilità condizionale dell'evento A dato l'evento B, *(ossia la probabilità che si verifichi A sapendo che si è verificato B)*, la quantità $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

ESEMPIO *(continua)* - $A = \{9, 25\}$, $B = \{multipli\ di\ 3\}$, $A \cap B = \{9\}$

$$\Rightarrow\ p(A) = \frac{2}{90}, \quad p(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{90}\ \Rightarrow\ p(A/B) = \frac{1}{30} = \frac{1/90}{1/3}$$

Probabilità Condizionale - 2

PROBABILITÀ CONDIZIONALE:

$$p\,(A/B) = \frac{p\,(A \cap B)}{p\,(B)} \quad (\,p\,(B) \neq 0\,)$$

(la formula non è simmetrica ed in generale si ha $p\,(A/B) \neq p\,(B/A)$)

Nei casi concreti è frequente che si conosca la probabilità di A *dato* B *e la probabilità di* B *e sia interessante calcolare la probabilità che gli eventi* A *e* B *accadano contemporaneamente, cioè la probabilità di* $A \cap B$. *Dalla definizione precedente si ricava:*

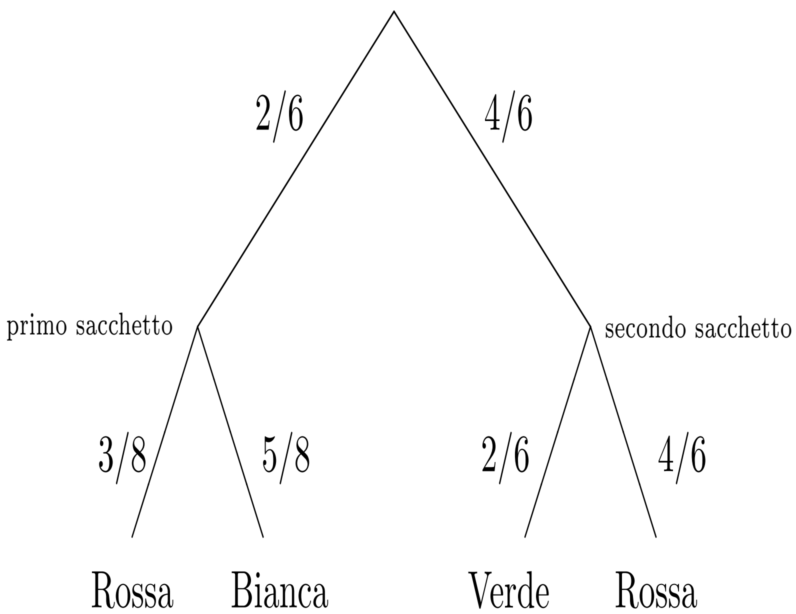
$$p\,(A \cap B) = p\,(A/B) \cdot p\,(B)$$

Grafi ad albero

ESERCIZIO -

Due sacchetti contengono il primo 5 palline bianche e 3 rosse, il secondo 4 palline rosse e 2 verdi. Tiriamo un dado: se esce 1 o 2 prendiamo una pallina dal primo sacchetto, se esce un numero diverso la prendiamo dall'altro. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca? sia rossa? sia verde?

Possiamo rappresentare la situazione con un grafo ad albero.



SOLUZIONE - la probabilità che la pallina sia bianca è $\frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8}$, che sia verde è $\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6}$, che sia rossa è $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6}$.

Eventi Indipendenti - 1

Due eventi A, B sono indipendenti se la probabilità che accadano entrambi è il prodotto della probabilità che accada A per la probabilità che accada B

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Per definizione di probabilità condizionale, due eventi A e B (se la probabilità di B è diversa da 0) sono indipendenti se e solo se la probabilità di A condizionata al verificarsi di B è uguale alla probabilità di B.

$$p(A/B) = p(A).$$

Osserviamo che la definizione di eventi indipendenti è simmetrica in A e B.

Dire che A e B sono indipendenti significa che sapere se B si è verificato o no non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di A e analogamente sapere che A si è verificato non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di B.

Qualunque sia A, l'insieme vuoto e A sono eventi indipendenti.

Qualunque sia A l'insieme Ω e A sono indipendenti.

Eventi Indipendenti - 2

Consideriamo il lancio di un dado . Gli eventi :

- esce un numero primo
- esce un numero divisibile per 3

sono eventi indipendenti in quanto

p (esce un numero primo) =1/2

p (esce un numero divisibile per 3)=1/3.

L' unico numero primo divisibile per 3 è 3 e si ha : $p\{3\} = 1/6 = 1/2 \cdot 1/3$.

Formula di Bayes - Esempio 1

Come varia la probabilità assegnata ad un evento al crescere della delle informazioni assunte ?

ESEMPIO *(nella vita quotidiana)* - Se a priori pensiamo che un amico molto probabilmente non è bugiardo, la terza volta che scopriamo che ci ha mentito, saremo certamente meno disposti a credergli per il futuro.

ESEMPIO *(tecnico)* - Supponiamo di avere due urne uguali all'esterno. La prima U_1 contiene 9 palline bianche e 1 nera, la seconda U_2 ne contiene 9 nere e 1 bianca. A **priori** possiamo scegliere una delle due urne in una situazione dall'esterno *(per noi che ne possiamo vedere il contenuto)* simmetrica.

Supponiamo di scegliere una delle due urne (con probabilità 1/2 ciascuna). Estraiamo una pallina e la guardiamo: è bianca.

DOMANDA 1 - Siamo ancora disposti a pensare che ci troviamo di fronte all'urna U_1 con probabilità 1/2 ?

Estraiamo un'altra pallina dalla stessa urna senza reimbussolare la prima: è bianca.

DOMANDA 2 - Siamo ancora disposti a pensare che ci troviamo di fronte all'urna U_1 con probabilità 1/2 ?

Formula di Bayes - Esempio 1

Quali sono le risposte ?

La risposta alla seconda domanda è ovvia:

- l'urna U_2 contiene *una sola* pallina bianca
- sono state estratte due palline bianche
- è impossibile sia stata scelta U_2 quindi
- certamente è stata scelta U_1

A **posteriori** U_2 ha probabilità 0 mentre U_1 ha probabilità 1.

(a **priori** U_1 *e* U_1 *hanno entrambe probabilità* $\frac{1}{2}$ *)*

Formula di Bayes - Esempio 1

La risposta alla prima domanda è più complessa, perchè:

- da entrambe le urne è possibile estrarre una pallina bianche

- da U_1 è *molto* probabile estrarre una pallina bianca ($p = 9/10$)

- da U_2 è *poco* probabile estrarre una pallina bianca ($p = 1/10$)

Dunque è più probabile sia stata scelta U_1. **Quanto ?**

- dai dati del problema conosciamo la probabilità di estrarre una pallina bianca, se è stata scelta l'urna U_1 $[p\,(Bianca/U_1)]$
- vogliamo conoscere la probabilità di essere di fronte all'urna U_1, sapendo che è stata estratta una pallina bianca $[p\,(U_1/Bianca)]$

Formula di Bayes - 1

FORMULA DI BAYES: esprime la probabilità condizionale di A dato B in funzione della probabilità condizionale di B dato A.

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \cdot p(A)}{p(B)}$$

- segue banalmente dalla definizione di probabilità condizionale

$$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) \quad \text{e} \quad p(B \cap A) = p(B/A) \cdot p(A)$$

$$\Rightarrow \; p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)$$

- **in problemi reali spesso $p(B)$ non è nota.**

Formula di Bayes - Esempio 1

nell'esempio:

$$A = \{urna\ U_1\}\ ,\ \ B = \{pallina\ Bianca\}$$

$$p\,(Bianca/U_1) = \frac{9}{10}\ ,\ p\,(U_1) = \frac{1}{2}\ ,\ p\,(Bianca) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

quindi:

$$p\,(U_1/Bianca) = \frac{p\,(Bianca/U_1)\cdot p\,(U_1)}{p\,(Bianca)} = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{9}{10}$$

Formula di Bayes - 2

- supponiamo che lo spazio degli eventi Ω sia l'unione di due sottospazi A_1, A_2 disgiunti
- qualunque evento $B \subset \Omega$ può essere decomposto nei due eventi incompatibili $B \cap A_1$, $B \cap A_2$

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \quad \text{con} \quad (B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = \emptyset$$

- dalla proprietà di additività di p e dalla definizione di probabilità condizionale, segue:

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) = p(B/A_1) \cdot p(A_1) + p(B/A_2) \cdot p(A_2)$$

- la formula di Bayes può essere riscritta:

$$p\,(A_1/B) = \frac{p\,(B/A_1) \cdot p\,(A_1)}{p\,(B/A_1) \cdot p\,(A_1) + p\,(B/A_2) \cdot p\,(A_2)}$$

Formula di Bayes - Esempio 2

Suppongo di giocare *testa* o *croce* con una persona sconosciuta. Vinco se esce *testa*, perdo se esce *croce*.

A **priori** mi fido abbastanza della persona con cui sto giocando ed attribuisco al fatto, che possa aver truccato la moneta a suo favore, probabilità pari a $\frac{1}{100}$.

Se perdo per 10 lanci consecutivi, il mio grado di fiducia nell'altro giocatore resta sempre lo stesso ?

Formula di Bayes - Esempio 2

Come cambia la probabiltà 0.01 di fronte a un ripetersi di fatti, che fa propendere per una probabilità di trucco maggiore?

Considero gli eventi:

- $T \;=\{\,la\ moneta\ è\ truccata\,\} \qquad NT=\{\,la\ moneta\ non\ è\ truccata\,\}$
- $P \;=\{\,perdo\ per\ 10\ volte\,\}=\{\,10\ croci\ consecutive\,\}$

a priori so che $\quad p\,(T)=\dfrac{1}{100},\;\; p\,(NT)=\dfrac{99}{100},\;\; p\,(P/T)=1\,,\;\; p\,(P/NT)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

Applicando la formula di Bayes modificata:

$$p\,(T/P)=\frac{p\,(P/T)\cdot p\,(T)}{p\,(P/T)\cdot p\,(T)+p\,(P/NT)\cdot p\,(NT)}=\frac{1\cdot\dfrac{1}{100}}{1\cdot\dfrac{1}{100}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\cdot\dfrac{99}{100}}\approx 0.91$$