Problemi di matching

Giulia Bernardi
giulia.bernardi@polimi.it

Almo Collegio Borromeo, Pavia
10 Aprile 2019

Un'idea da Nobel

Nel 2012 il premio Nobel per l'economia è stato assegnato a Lloyd Shapley e Alvin Roth, per
"*la teoria delle allocazioni stabili e per le pratiche di progettazione del mercato*"

Il problema del matrimonio

In un villaggio, isolato dal resto del mondo, si trova un gruppo di donne e di uomini che avendo raggiunto la maggiore età si devono sposare entro la fine dell'anno.
Il capovillaggio è incaricato di celebrare i matrimoni e deve decidere quali siano le coppie da formare in modo che tutti i giovani siano felicemente sposati, senza divorzi e tradimenti.
Come può fare?

Oltre al matrimonio

Analizzare le situazioni in cui si devono creare delle coppie a partire da due gruppi distinti...

1. donne & uomini
2. aziende & lavoratori
3. ospedali & specializzandi
4. studenti & università
5. donatori di organi & malati
6. $\cdots$

Come affrontare il problema? Come risolverlo?

- Alcune ipotesi per semplificare

  Quali?

- Cercare soluzioni valide

  In che senso?

Il modello

Problema di Matching

Un **problema di matching** è definito da:

1. due insiemi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{M}$ con la stessa cardinalità
2. dei profili di preferenze $(\{\succsim_w\}_{w\in\mathcal{W}}, \{\succsim_m\}_{m\in\mathcal{M}})$, con $\succsim_m$ definite su $\mathcal{W}$ e viceversa $\succsim_w$ definita su $\mathcal{M}$

Un **matching** è una funzione biunivoca $b : \mathcal{W} \to \mathcal{M}$

Soluzioni stabili

Una coppia $W - m$ **obbietta** al matching Λ se m e W preferiscono entrambi stare insieme piuttosto che stare con i partner a cui sono associati nel matching Λ.

Matching stabile

Un matching Λ è **stabile** se non c'è nessuna coppia che obbietta al matching proposto.

Per esempio: consideriamo il matching

$$\Lambda = \{(m, Z), (b, W), \dots\}$$

se vale

$$m \succ_W b \qquad \wedge \qquad W \succ_m Z.$$

allora Λ non è stabile perché la coppia (w, m) può migliorare la sua situazione.

Esempio

Consideriamo i due insiemi $\{A, B, C\}, \{j, l, m\}$ e le preferenze:

$$
\begin{array}{ll}
A : j > l > m & j : B > C > A \\
B : l > m > j & l : A > C > B \\
C : m > l > j & m : A > B > C
\end{array}
$$

Consideriamo i due matching:

$$(A, j)\ (B, m)\ (C, l)$$

e

$$(A, m)\ (B, l)\ (C, j)$$

Il primo matching è stabile.
Il secondo non è stabile, la coppia (A, l) obbietta.

Esistenza di soluzioni stabili

Quando esistono soluzioni stabili?
Come si possono trovare?

Teorema di Gale e Shapley

Ogni problema di matching ammette una soluzione stabile

$\rightarrow$ La dimostrazione è costruttiva: c'è un algoritmo che permette di trovare una soluzione stabile ad ogni problema.

L'algoritmo di visita degli uomini

Giorno 1 Ogni uomo si reca a visitare la donna in cima al suo elenco di preferenze.

- Se tutte le donne ricevono la visita di un solo uomo, l'algoritmo si conclude.
- Se una donna riceve più di una visita, sceglie l'uomo che preferisce tra i suoi attuali pretendenti
- Gli uomini che sono stati rifiutati tornano a casa e le donne che non hanno ricevuto nessuna visita aspettano.

Giorno 2 Gli uomini che sono stati rifiutati il giorno precedente, si recano a visitare la donna al secondo posto nel loro elenco di preferenze. ...

Giorno k Gli uomini che non sono ancora accoppiati, visitano la prima donna nel loro elenco di preferenze che ancora non hanno visitato

- Se tutte le donne ricevono la visita di un solo uomo, l'algoritmo si conclude.
- Se una donna riceve più di una visita, sceglie l'uomo che preferisce tra i suoi attuali pretendenti
- Gli uomini che sono stati rifiutati tornano a casa e le donne che non hanno ricevuto nessuna visita aspettano.

Osservazioni

- Gli uomini visitano le proprie preferenze in ordine decrescente;
- Le donne ricevono visita dalle loro preferenze in ordine crescente.
- Se una donna ha ricevuto visite a un certo passo, a partire dal passo successivo avrà sempre almeno un pretendente.

Dobbiamo dimosrare che questo algoritmo termina fornendo una soluzione stabile a qualsiasi problema di matching.

Dimostrazione

Punto 1: L'algoritmo termina e ogni donna è abbinata a un uomo.
$\rightarrow$ gli uomini non possono essere rifiutati in eterno da una donna, al più dovranno aspettare e scorrere tutto il loro elenco di preferenze prima di trovare una donna rimasta single; visto che il numero di uomini e di donne è lo stesso, questo però dovrà succedere prima o poi ponendo fine al corteggiamento.

Punto 2: Al termine dell'algoritmo nessun uomo può trovarsi in una coppia che obbietta alla soluzione proposta.

$\rightarrow$ Consideriamo un uomo m

1. non può preferire una donna che non ha visitato rispetto alla sua attuale partner, visto che si è recato a visitare le donne partendo dalla prima
2. non può far parte di una coppia che obbietta insieme a una donna che ha già visitato, perché se è stato scartato significa che la donna si trova con un uomo che preferisce a m

L'algoritmo di Gale e Shapley

$$\begin{array}{ll} A : j > l > m & j : B > C > A \\ B : l > m > j & l : A > C > B \\ C : m > l > j & m : A > B > C \end{array}$$

Qual è la soluzione applicando l'algoritmo di Gale e Shapley?

Ci sono due soluzioni stabili che si possono trovare, a seconda di quale sia il gruppo che *visita*
Se visitano A, B, C:

$$(A, j), (B, l), (C, m)$$

Se visitano j, l, m:

$$(A, l), (B, m), (C, j)$$

Confronto tra matching

Consideriamo due matching Δ e Θ.

Definiamo la relazione $\succeq_m$ in questo modo:
$\Delta \succeq_m \Theta$ se ogni uomo

- o è associato alla stessa donna nei due matching
- o è associato in Δ ad una donna che preferisce rispetto a quella cui è associato in Θ

Invertendo i ruoli di uomini e donnne, possiamo definire la relazione $\succeq_w$

Proprietà

- riflessiva:

  $\Delta \succeq_m (\succeq_w)\Delta$
- transitiva: $\Delta \succeq_m (\succeq_w)\Theta \ \wedge \ \Theta \succeq_m (\succeq_w)\Lambda \Rightarrow \Delta \succeq_m (\succeq_w)\Lambda$
- *Attenzione:* non sono *complete*, cioè non tutte le coppie possono essere confrontate

Confronto tra matching

Teorema

Considerando una qualsiasi coppia di soluzioni stabili Θ e Δ, allora la prima è migliore per le donne della seconda se e solo se la seconda è migliore per gli uomini della prima.
Cioè $\Delta \succeq_m \Theta$ se e solo se $\Theta \succeq_w \Delta$.

Dimostrazione: Consideriamo $\mathcal{M} = \{a, b, c, \cdots\}$ e $\mathcal{W} = \{A, B, C, \cdots\}$.
Immaginiamo $\Delta \succeq_m \Theta$ e $(a, A) \in \Delta$, $(b, A) \in \Theta$.
Dobbiamo dimostrare che per A, b sia meglio di a, cioè che $b \succ_A a$.
Immaginiamo che in Θ, a sia accoppiato con F.
Visto che $\Delta \succeq_m \Theta$ a preferisce il suo partner in Θ: $A \succ_a F$ Ma

$$\{(a, F), (b, A)\} \subset \Theta$$

e visto che Θ è stabile, dev'essere che A non è interessata a b, cioè $b \succ_A a$.

Confronto tra matching

Teorema
Tra tutte le possibili soluzioni stabili ad un problema di matching, quella ottenuta applicando l'algoritmo di Gale-Shapley è la migliore per l'insieme dei giocatori che ha il ruolo di recarsi in visita agli elementi dell'altro insieme.

Indichiamo con $\Lambda_m(\Lambda_w)$ la soluzione ottenuta con gli uomini (le donne) che visitano e sia Θ un qualsiasi altro matching. Allora

$$\Lambda_m \succeq_m \Theta \succeq_m \Lambda_w \qquad \Lambda_w \succeq_w \Theta \succeq_w \Lambda_m$$

Altre soluzioni stabili

Consideriamo due matching Δ, Θ. Definiamo un nuovo matching $\Delta \vee_w \Theta$ come il matching in cui ogni donna è abbinata all'uomo che preferisce tra i due matching Δ e Θ

Analogamente possiamo definire $\vee_m$ per gli uomini.

Proposition

Se Δ, Θ sono matching stabili, allora anche $\Delta \vee_w \Theta$ è stabile

Come trovare tutte le soluzioni stabili?

Altre soluzioni stabili

Algoritmo di McVitie – Wilson

Algoritmo di McVitie – Wilson (MWA). Reiterare la seguente procedura finché esiste almeno un uomo $m \in \mathcal{M}$ senza ancora una partner:

- m fa visita a una donna w da cui non è già stato rifiutato (proposal);
- se w non ha un partner, m diventa suo il nuovo partner e il passo è concluso; se invece w ha già un partner m', ella sceglie tra m e m', lasciando senza una partner quello che preferisce meno (refusal).

Come l'algoritmo di Gale e Shapley (GSA), anche (MWA) conduce alla male optimal solution: i giocatori compiono le stesse scelte, anche se in ordine differente.

Altre soluzioni stabili

(MWA) versus (GSA)

- In (GSA), ad ogni passo l'operazione proposal viene eseguita da tutti gli uomini senza una partner simultaneamente; successivamente, l'operazione refusal viene eseguita da tutte le donne con almeno un pretendente.
- In (MWA), ad ogni passo l'operazione proposal viene eseguita da un solo uomo single m alla volta; successivamente, la donna scelta da m esegue l'operazione refusal.

Di conseguenza:

- ad ogni passo di (GSA) sarà necessario controllare se ciascun uomo è stato rifiutato o meno, e se ciascuna donna ha ricevuto o meno nuove proposte: maggior costo computazionale;
- (MWA) è più efficiente, ma tuttavia il miglioramento ottenuto non è ampio.

Breakmarriage.

Dati un uomo $m \in \mathcal{M}$ e una soluzione stabile Λ, definiamo un nuovo matching $\Lambda' = B(m, S)$ ottenuto a partire da Λ nel modo seguente:

- m rompe il suo matrimonio con $w = \Lambda(m)$ e fa la sua prossima proposta, scorrendo lungo la sua lista di preferenze, dando inizio a una nuova sequenza di operazioni proposal e refusal come in (MWA);
- da questo momento in poi w accetterà solo proposte da uomini che preferisce a m;
- se w riceve una proposta da un uomo $m' >_w m$, poniamo $\Lambda'(m) := w$ e la procedura termina
  $\rightarrow$ in tal caso diciamo che l'operazione è terminata *con successo*;
- se w non riceve nessuna proposta da un uomo che preferisce a m o un uomo viene rifiutato da tutte le donne la procedura termina e poniamo $\Lambda' := \Lambda$.

Breakmarriage

Teorema

Se l'operazione di breakmarriage termina con successo, allora individua una soluzione stabile per il problema di matching.

Teorema

Ogni soluzione stabile può essere ottenuta a partire dalla soluzione migliore per gli uomini Λ_m applicando un certo numero di operazioni breakmarriage.

Breakmarriage

Un esempio

Men choose women in the order:

Man 1 chooses	5	7	1	2	6	8	4	3
Man 2 chooses	2	3	7	5	4	1	8	6
Man 3 chooses	8	5	1	4	6	2	3	7
Man 4 chooses	3	2	7	4	1	6	8	5
Man 5 chooses	7	2	5	1	3	6	8	4
Man 6 chooses	1	6	7	5	8	4	2	3
Man 7 chooses	2	5	7	6	3	4	8	1
Man 8 chooses	3	8	4	5	7	2	6	1

Women choose men in the order:

Woman 1 chooses	5	3	7	6	1	2	8	4
Woman 2 chooses	8	6	3	5	7	2	1	4
Woman 3 chooses	1	5	6	2	4	8	7	3
Woman 4 chooses	8	7	3	2	4	1	5	6
Woman 5 chooses	6	4	7	3	8	1	2	5
Woman 6 chooses	2	8	5	4	6	3	7	1
Woman 7 chooses	7	5	2	1	8	6	4	3
Woman 8 chooses	7	4	1	5	2	3	6	8

La soluzione con l'algoritmo di visita degli uomini è

$$S_1 = \{(1,5),(2,3),(3,8),(4,6),(5,7),(6,1),(7,2),(8,4)\}$$

Applichiamo **breakmarriage** all'uomo 1 e alla donna 5.
Quale soluzione si trova? E' stabile?

Tutte le soluzioni stabili

Un esempio

Men choose women in the order:

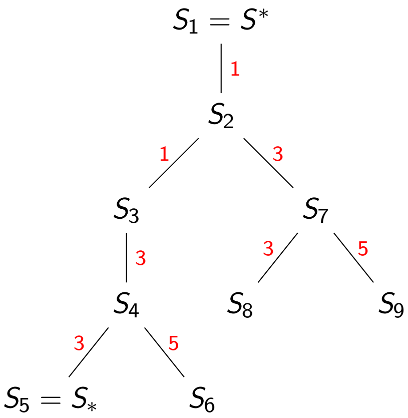
Man 1 chooses	5	7	1	2	6	8	4	3
Man 2 chooses	2	3	7	5	4	1	8	6
Man 3 chooses	8	5	1	4	6	2	3	7
Man 4 chooses	3	2	7	4	1	6	8	5
Man 5 chooses	7	2	5	1	3	6	8	4
Man 6 chooses	1	6	7	5	8	4	2	3
Man 7 chooses	2	5	7	6	3	4	8	1
Man 8 chooses	3	8	4	5	7	2	6	1

Women choose men in the order:

Woman 1 chooses	5	3	7	6	1	2	8	4
Woman 2 chooses	8	6	3	5	7	2	1	4
Woman 3 chooses	1	5	6	2	4	8	7	3
Woman 4 chooses	8	7	3	2	4	1	5	6
Woman 5 chooses	6	4	7	3	8	1	2	5
Woman 6 chooses	2	8	5	4	6	3	7	1
Woman 7 chooses	7	5	2	1	8	6	4	3
Woman 8 chooses	7	4	1	5	2	3	6	8

Stable solutions

	Women								
Man	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
1 marries	5	8	3	3	3	3	8	8	8
2 marries	3	3	6	6	6	6	3	3	3
3 marries	8	5	5	1	2	1	1	2	1
4 marries	6	6	8	8	8	8	6	6	6
5 marries	7	7	7	7	1	2	7	1	2
6 marries	1	1	1	5	5	5	5	5	5
7 marries	2	2	2	2	7	7	2	7	7
8 marries	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Number of proposals	16	22	31	35	43	38	26	34	29
Choice count	48	49	51	50	54	51	48	52	49



Esercizio

Dati gli insiemi $\{a, b, c\}$ e $\{D, E, F\}$ con le preferenze:

$$
\begin{array}{llcll}
a: & D >_a E >_a F & \qquad & D: & c >_D b >_D a \\
b: & D >_b F >_b E & & E: & b >_E a >_E c \\
c: & F >_c D >_c E & & F: & a >_F b >_F c
\end{array}
$$

Trovare le soluzioni stabili con l'algoritmo di Gale e Shapley.
Esistono altre soluzioni?

Soluzioni stabili:

$$\{(a, E), (b, D), (c, F)\}$$

$$\{(a, E), (b, F), (c, D)\}$$

$$\{(a, F), (b, E), (c, D)\}$$

Oltre il matrimonio

E' possibile applicare questo modello a situazioni reali? Quali elementi dobbiamo aggiungere e prendere in considerazione?

- Cosa succede se il numero di uomini e di donne è diverso?
- E' possibile che qualcuno voglia sposarsi ma non "ad ogni costo"?
- Si possono avere soluzioni per cui ad un elemento sono associati più elementi?
- Se i due insiemi non sono distinti?
- Come conoscere le preferenze delle persone?
- Se le preferenze delle persone cambiano nel corso del tempo?
- ...

Matrimoni poligami

Tre studenti: A,B, C vogliono iscriversi a Harvard dove ci sono due posti disponibili o Yale che ha un solo posto disponibile.
Le preferenze degli studenti sono:

$$A: \ Y > H \qquad B: \ Y > H \qquad C: \ H > Y$$

Quelle delle università:

$$H: \ A > B > C \qquad Y: \ C > B > A$$

Algoritmo con gli studenti che visitano:

$$(A, H), \qquad (B, Y), \qquad (C, H)$$

Algoritmo con le università che visitano

$$(A, H), \qquad (B, H), \qquad (C, Y)$$

Strategy-proof

Le persone diranno la verità sulle loro preferenze o hanno un incentivo a mentire e **manipolare** *il gioco?*

Il gruppo che visita non ha incentivo a mentire: la soluzione a cui si arriva è la migliore possibile per loro!

Il gruppo che riceve le visite può manipolare il gioco: in alcuni casi, mentendo sulle loro preferenze reali i giocatori possono ottenere una soluzione che preferiscono rispetto a quella a cui si arriverebbe se non mentissero.

Il gioco è manipolabile

Un esempio

$$\begin{aligned}
\textbf{Ettore} &: \textit{Elena} \succ \textit{Andromaca} \succ \textit{Lavinia} \\
\textbf{Enea} &: \textit{Elena} \succ \textit{Lavinia} \succ \textit{Andromaca} \\
\textbf{Paride} &: \textit{Andromaca} \succ \textit{Elena} \succ \textit{Lavinia} \\
\textbf{Elena} &: \textit{Paride} \succ \textit{Ettore} \succ \textit{Enea} \\
\textbf{Andromaca} &: \textit{Ettore} \succ \textit{Paride} \succ \textit{Enea} \\
\textbf{Lavinia} &: \textit{Enea} \succ \textit{Ettore} \succ \textit{Paride}
\end{aligned}$$

Immaginando che gli uomini visitino le donne. Quale soluzione si ottiene? Le donne possono mentire per migliorare la loro situazione?

Se gli uomini visitano si ottiene
(Ettore,Elena),(Enea,Lavinia),(Paride,Andr.)
Se Elena mente: *Paride* $\succ$ *Enea* $\succ$ *Ettore* migliora la sua situazione perché la soluzione diventa *(Ettore,Andr.),(Enea,Lavinia),(Paride,Elena)*

Il problema dei coinquilini

Problema

Quattro amici devono decidere come dividersi in due camere doppie durante una vacanza.

$\rightarrow$Questo problema potrebbe non avere una soluzione stabile: dipende dalle preferenze dei giocatori.
Ad esempio se i giocatori sono $\{A, B, C, D\}$ e le preferenze sono:

$$\mathbf{A} : B \succ C \succ D$$
$$\mathbf{B} : C \succ A \succ D$$
$$\mathbf{C} : A \succ B \succ D$$
$$\mathbf{D} : A \succ B \succ C$$

Bibliografia

- Gale, D.; Shapley, L. S. (1962). *College Admissions and the Stability of Marriage*. American Mathematical Monthly.
- McVitie D. G. e Wilson L. B, (1971) *The stable marriage problem*, Communications of the ACM.
- Roth A. E, (1984) *The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory*, Journal of political Economy.
- Roth A. E. e Peranson E., (1999) *The redesign of the matching market for American physicians: Some engineering aspects of economic design*, American Economic Review.
- Numberphile, *Stable marriage problem* video su youtube