Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 14 marzo 2019 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso:www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2019.html

IL PARI O DISPARI

I \ II	P	D
P	(-1, 1)	(1, -1)
D	(1, -1)	(-1, 1)

- Questo gioco non ha equilibri di Nash;
- Cerchiamo di ampliare opportunamente lo spazio delle strategie in modo che abbia equilibri di Nash in questo nuovo spazio.

Strategie miste

II / I	q	$1-q$
p	(-1, 1)	(1, -1)
$1-p$	(1, -1)	(-1,1)

II / I	q	$1-q$
p	pq	p(1-q)
$1-p$	(1-p)q	(1-p)(1-q)

Estensione mista

- “Estensione mista del gioco”,
- Le strategie sono le distribuzioni di probabilità sull’insieme delle strategie (pure).
- Il giocatore I invece di fare una scelta per così dire “secca”, può scegliere di giocare la strategia P con probabilità p e la strategia D con probabilità $1-p$.
- Analogamente il giocatore II.

Strategie miste

- Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.
- Abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.
- Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1.
- Il payoff dei giocatori in corrispondenza ai valori p e q delle strategie è l'utilità attesa, supponendo che i due agiscano indipendentemente.

Strategie miste

II / I	q	$1-q$
p	pq	p(1-q)
$1-p$	(1-p)q	(1-p)(1-q)

Utilità attesa del primo giocatore:

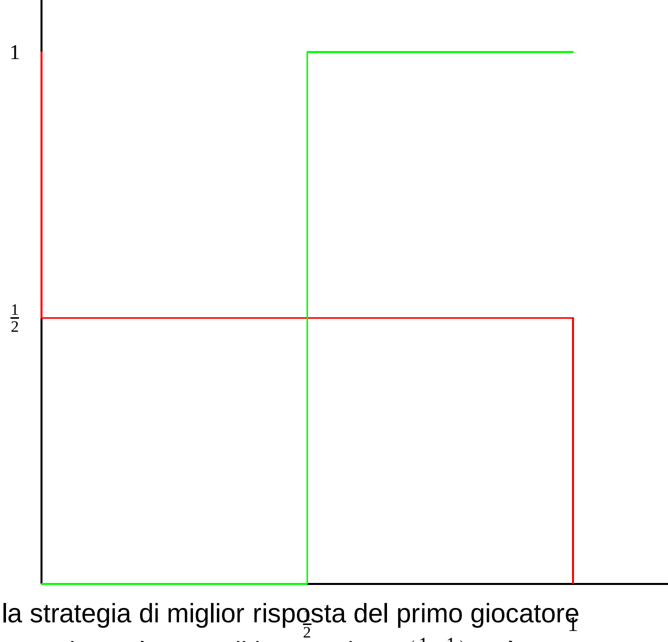
$f(p,q) = pq\cdot(-1)+p(1-q)\cdot(+1)+q(1-p)\cdot(+1)+(1-p)(1-q)\cdot(-1) =$
$-4pq+2p+2q-1 = (-4q+2)p+2q-1$

L'utilità ettesa del secondo è il suo opposto.

Strategie miste

- $\max f(p,q)$ si ha per $p=1$ quando $-4q+2 \geq 0$, cioè $q \leq \frac{1}{2}$
- $\max f(p,q)$ si ha per $p=0$ quando $-4q+2 \leq 0$, cioè $q \geq \frac{1}{2}$
- $\max f(p,q)$ si ha per ogni p quando $-4q+2=0$, cioè $q=\frac{1}{2}$
- $g(p,q)=(4p-2)q-2p+1$
- $\max g(p,q)$ si ha per $q=1$ quando $4p-2 \geq 0$, cioè $p \geq \frac{1}{2}$
- $\max g(p,q)$ si ha per $q=0$ quando $4p-2 \leq 0$, cioè $p \leq \frac{1}{2}$
- $\max g(p,q)$ si ha per ogni q quando $4p-2=0$, cioè $p=\frac{1}{2}$

La linea rossa è la strategia di miglior risposta del primo giocatore. La linea verde è la strategia di miglior risposta del secondo giocatore.



In rosso è segnata la strategia di miglior risposta del primo giocatore e in blu quella del secondo. Nel punto di intersezione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, p è miglior risposta a q e viceversa.

EQUILIBRIO DI NASH!!!!!!!

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un equilibrio di Nash del gioco del pari o dispari.

IL GIOCO DELLE DUE DITA

II \ I	*I*	*II*
I	(-2, 2)	(3, -3)
II	(3, -3)	(-4,4)

Strategie miste

I \ II	q	$1-q$
p	pq	p(1-q)
$1-p$	(1-p)q	(1-p)(1-q)

che nel nostro caso per il primo giocatore è:

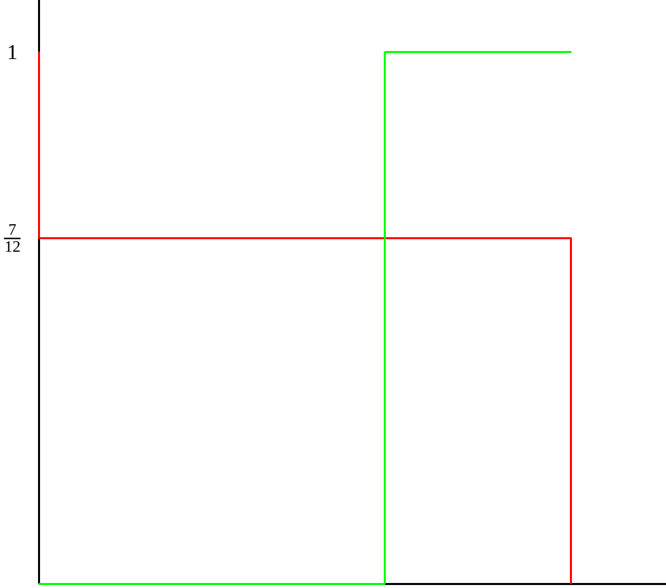
$f(p,q) = pq\cdot(-2)+p(1-q)\cdot(+3)+q(1-p)\cdot(+3)+(1-p)(1-q)\cdot(-4) =$
$-12pq + 7p + 7q - 4 = (-12q+7)p + 7q - 4$

Naturalmente il payoff atteso del secondo è il suo opposto.

Strategie miste

- $\max f(p,q)$ si ha per $p = 1$ quando $-12q + 7 \geq 0$, cioè $q \leq \frac{7}{12}$
- $\max f(p,q)$ si ha per $p = 0$ quando $-12q + 7 \leq 0$, cioè $q \geq \frac{7}{12}$
- $\max f(p,q)$ si ha per ogni p quando $-12q + 7 = 0$, cioè $q = \frac{7}{12}$
- $g(p,q) = (12p - 7)q - 7p + 4$
- $\max g(p,q)$ si ha per $q = 1$ quando $12p - 7 \geq 0$, cioè $p \geq \frac{7}{12}$
- $\max g(p,q)$ si ha per $q = 0$ quando $12p - 7 \leq 0$, cioè $p \leq \frac{7}{12}$
- $\max f(p,q)$ si ha per ogni q quando $12p - 7 = 0$, cioè $p = \frac{7}{12}$

La linea rossa è la strategia di miglior risposta del primo giocatore. La linea verde è la strategia di miglior risposta del secondo giocatore.



In rosso è segnata la strategia di miglior risposta del primo giocatore e in verde quella del secondo. Nel punto di intersezione $\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$, p è miglior risposta a q e viceversa.

Calcoliamo il guadagno atteso del primo giocatore quando viene adottata la coppia di strategie di Nash:
$\frac{49}{144} \cdot (-2) + \frac{25}{144} \cdot (-4) + \frac{35}{144} \cdot (3) + \frac{35}{144} \cdot (3) = \frac{210-198}{144} = \frac{1}{12}$

È facile vedere se un gioco è pari?

I \ II	P	D
P	(-2, 2)	(3, -3)
D	(3, -3)	(-4,4)

I \ II	A_2	B_2	C_2
A_1	(-1, 1)	(1, -1)	(-, 1)
B_1	(1, -1)	(-1,1)	(1, -1)
C_1	(-1, 1)	(1,-1)	(-1, 1)

Poker semplificato

Rivediamo dal punto di vista dell'equilibrio di Nash il poker semplificato:

I \ II	P	S
$R_A R_K$	(1, -1)	(0,0)
$R_A P_K$	(0,0)	(1/2, -1/2)
$P_A P_K$	(-1, 1)	(-1,1)
$P_A R_K$	(0, 0)	(-3/2,3/2)

NB: la strategia $R_A R_K$ prevede (per via di R_K) che il giocatore I bluffi.

Poker semplificato dopo aver tolto le strategie dominate

I \ II		P	S
		q	$1-q$
$R_A P_K$	p	(0,0)	(1/2, -1/2)
$R_A R_K$	$1-p$	(1, -1)	(0,0)

- $f(p,q) = -\frac{3}{2}pq + \frac{1}{2}p + q = (-\frac{3}{2}q + \frac{1}{2})p + q$
- massimo per $p = 1$ quando $q \leq \frac{1}{3}$
- massimo per $p = 0$ se $q \geq \frac{1}{3}$ e per ogni valore di p se $q = \frac{1}{3}$
- $g(p,q) = (\frac{3}{2}p - 1)q - \frac{1}{2}p$
- massimo per $q = 1$ quando $p \geq \frac{2}{3}$
- massimo per $q = 0$ se $p \leq \frac{2}{3}$ e per ogni valore di q se $p = \frac{2}{3}$
- Quindi l'equilibrio di Nash si ottiene per $p = \frac{2}{3}$ e $q = \frac{1}{3}$

- L'equilibrio di Nash prevede per il primo giocatore di giocare la prima strategia con probabilità $\frac{2}{3}$ e di conseguenza la seconda con probabilità $\frac{1}{3}$.
- La strategia $R_A R_K$ prevede (per via di R_K) che il giocatore I bluffi.
- Quindi la strategia ottimale per I prevede con probabilità positiva $(1/3)$ che I adotti la strategia $R_A R_K$ e quindi che, bluffi mediamente $1/3$ delle volte
- È ottimale per I bluffare con questa “frequenza”, nè più spesso nè meno spesso!

Teorema di Nash

Il merito di Nash sta nell'aver dimostrato l'esistenza di almeno un equilibrio (di Nash) in ipotesi abbastanza generali. Vale infatti il

TEOREMA DI NASH

Siano X e Y sottoinsiemi chiusi, convessi e limitati di $\mathbf{R^n}$ (per esempio l'insieme delle strategie miste di un gioco finito soddisfa a queste proprietà) ,f e g funzioni continue , inoltre valgano le proprietà:

$x \to f(x, , y)$ è quasi concava per ogni y fissato

$y \to g(x, y)$ è quasi concava per ogni x fissato

Allora esiste almeno un equilibrio di Nash.

Una funzione h di una variabile si dice **quasi concava** se per ogni numero reale k, l'insieme

$A_k = \{x \;\; h(x) \geq k\}$

è convesso.

FALCHI E COLOMBE

I \ II	F_2	C_2
F_1	(-2, -2)	(2, 0)
C_1	(0, 2)	(1, 1)

- $f(p,q) = -2pq + 2p(1-q) + (1-p)(1-q) = (-3q+1)p - q + 1$
- massimo per $p = 1$ quando $q \leq \frac{1}{3}$
- massimo per $p = 0$ se $q \geq \frac{1}{3}$ e per ogni valore di p se $q = \frac{1}{3}$
- $g(p,q) = -2pq + 2q(1-p) + (1-p)(1-q) = (-3p+1)q - p + 1$

- massimo per $q = 1$ quando $p \geq \frac{1}{3}$
- massimo per $q = 0$ se $p \leq \frac{1}{3}$ e per ogni valore di q se $p = \frac{1}{3}$
- Quindi ci sono tre equilibri di Nash corrispondenti elle coppie di strategie $(0,1)$, $(1,0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

  Il risultato è che con probabilità $\frac{1}{3}$ conviene comportarsi da falchi e con probabilità $\frac{2}{3}$ conviene comportarsi da colombe. Ovviamente questi numeri dipendono dai numeri scelti per le utilità dei falchi e delle colombe.

DUOPOLIO DI COURNOT(1838)

Cournot (1838) ha anticipato la definizione di equilibrio di Nash nel contesto di un particolare modello di duopolio.

PRIMA SITUAZIONE: CONCORRENZA

Due imprese 1 e 2 operano in un mercato in situazione di duopolio producendo in modo indipendente lo stesso bene e intendono massimizzare i loro profitti.

DUOPOLIO DI COURNOT

- Il prezzo di mercato per unità di prodotto è funzione decrescente della quantità prodotta e supponiamo per semplicità che sia una spezzata:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{se } Q < a \\ 0 & \text{se } Q \geq a \end{cases}$$

  dove Q è la quantità totale di merce prodotta e quindi presente sul mercato.
- Il costo per produrre una unità di bene è lo stesso per entrambe le imprese e lo indichiamo con k: $C_1 = C_2 = k$, dove C_1 è il costo che deve sostenere la prima impresa per produrre una unità di bene e C_2 è il costo che deve sostenere la seconda impresa.

DUOPOLIO DI COURNOT

- Le due imprese sono i giocatori 1 e 2
- La scelta delle strategie consiste nella scelta della quantità di bene da produrre.
- Indichiamo con x la scelta della quantità da produrre fatta dalla prima impresa e con y la scelta della quantità di bene da produrre fatta dalla seconda impresa.
- $X_1 = Y_1 = [0, +\infty)$ sono gli spazi delle strategie.

DUOPOLIO DI COURNOT

La quantità totale di bene prodotto è $Q = x + y$. Il prezzo di mercato per unità di merce è lo stesso per le due imprese in quanto:

- esse producono lo stesso bene,
- sono in possesso della stessa tecnologia,
- il consumatore, quando compra il bene, non è in grado di stabilire quale delle due imprese lo abbia prodotto (non esistono prodotti per così dire “firmati”).

Consideriamo solo valori di produzione minori o uguali di a, cioè supponiamo che le imprese producano solo a patto di poter vendere a prezzo positivo: si ha così $P(x+y) = a - (x+y)$ con la condizione $x + y \leq a$.
In pratica questo consiste nel restringere gli spazi di strategie a $X = Y = [0, a]$

DUOPOLIO DI COURNOT

Il ricavo delle due imprese si può descrivere nel modo seguente:
$R_1 = P \cdot x = [a - (x + y)] \cdot x \qquad R_2 = P \cdot y = [a - (x + y)] \cdot y$.
Osserviamo che il ricavo della prima impresa dipende da x e da y, cioè dalla quantità da lei prodotta ma anche dalla quantità prodotta dalla seconda impresa e viceversa.
Supponiamo che il costo per produrre il bene sia proporzionale alla quantità di bene prodotta.

DUOPOLIO DI COURNOT

Alcuni dati:

Con questa ipotesi avremo:

$C_1 = kx \qquad C_2 = ky$

I profitti sono le differenze tra ricavi e costi:

$u_1 = R_1 - C_1 = [a - (x + y)] \cdot x - kx = x(a - x - y - k)$

$u_2 = R_2 - C_2 = y(a - x - y - k)$ o ancora:

$u_1 = -x^2 + x(a - k - y) \qquad u_2 = -y^2 + y(a - x - k)$.

DUOPOLIO DI COURNOT

Otteniamo due funzioni: la prima è di secondo grado nella variabile x una volta fissato y, la seconda è di secondo grado nella variabile y una volta fissato x.
Ciascuna impresa cercherà di scegliere la sua strategia in modo da massimizzare il suo profitto. Per esempio la prima impresa vuole massimizzare u_1 ma può scegliere solo x (su y non ha alcun controllo) e analogo discorso possiamo fare per u_2 e la seconda impresa.

DUOPOLIO DI COURNOT

Analizziamo u_1 come funzione di x: si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso il basso che ha massimo nel vertice di ascssa:

$$\bar{x} = \frac{a - k - y}{2}$$

$\bar{x}$ è la strategia di miglior risposta della prima impresa alla scelta della strategia y della seconda impresa.

$$\bar{y} = \frac{a - k - x}{2}$$

è la strategia di miglior risposta dell'impresa 2 alla scelta x dell'impresa 1.

DUOPOLIO DI COURNOT

$x = \frac{a-k-y}{2}$ e $y = \frac{a-k-x}{2}$:
Il punto di intersezione $A = (\bar{x}, \bar{y})$ soddisfa la proprietà che $\bar{x}$ è miglior risposta a $\bar{y}$ e $\bar{y}$ è miglior risposta a $\bar{x}$.
Calcoliamo le coordinate di A risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{a-k-y}{2} \\ y = \frac{a-k-x}{2} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{a-k}{3} \\ \bar{y} = \frac{a-k}{3} \end{cases}$$

DUOPOLIO DI COURNOT

L'utile realizzato dall'impresa 1 si ottiene sostituendo $\bar{x}$ in u_1:

$$u_1 = -(\frac{a-k}{3})^2 - \frac{a-k}{3}(a-k-\frac{a-k}{3}) = \frac{(a-k)^2}{9}$$

e in modo analogo

$$u_2 = \frac{(a-k)^2}{9}$$

. Il prezzo unitario è:

$$P_A = a - (\bar{x} + \bar{y}) = a - \frac{2}{3}(a-k)$$

.

SECONDA SITUAZIONE: COLLUSIONE

Se i due giocatori (le due imprese) si accordano (fanno cartello) per produrre complessivamente z ($\frac{z}{2}$ ciascuna) il prezzo unitario è $P(z) = a - z$ e l'utile complessivo da massimizzare sarà:

$$u = P \cdot z = (a - z) \cdot z - kz = (a - z - k) \cdot z = -z^2 + z \cdot (a - k).$$

Si tratta ancora di una parabola con concavità verso il basso quindi con un massimo nel vertice di ascissa:

$$z = \frac{a - k}{2}$$

Ogni impresa produce

$$\frac{z}{2} = \frac{a-k}{4}$$

Si ha $u_1 = u_2 = \frac{z^2+az-kz}{2} = \frac{3}{16}(a-k)^2$.
Il prezzo unitario in questo caso è

$$P_B = a - \frac{1}{2}(a-k) > a - \frac{2}{3}(a-k) = P_A$$

SECONDA SITUAZIONE: COLLUSIONE

Cosa ha di strano questa soluzione?
La stranezza è esattamente identica ala stranezza della soluzione del dilemma del prigioniero.
Massimizzando in situazione di collusione le industrie producono ciascuna $\frac{a-k}{4}$, un po' di meno di quello che producono in regime di concorrenza, cioè quando ciascuna massimizza il suo profitto senza accordarsi con l'altra.
Ecco a cosa serve l'antitrust!!!!
In realtà i giocatori di questo gioco non sono solo due, c'è un terzo giocatore che è il consumatore che viene avvantaggiato in regime di libera concorrenza. Le imprese in concorrenza producono un po' di più di quello che produrrebbero se potessero fare un accordo. Così i prezzi scendono a favore dei consumatori.

TERZA SITUAZIONE: DECISIONI NON CONTEMPORANEE (STACKELBERG)

I dati del problema sono identici ma questa volta la prima impresa (lieder) sceglie per prima la quantità da produrre e la seconda (follower) sceglie conoscendo la scelta della prima.
Si suppone nel modello che queste regole siano note e cioè che la prima impresa sceglie sì per prima ma sapendo che poi sceglierà anche la seconda, e che la seconda sarà nel momento della scelta a conoscenza della scelta della prima.

Per risolvere il problema procediamo così: supponiamo dapprima di metterci dal punto di vista della seconda impresa a cui viene comunicato che la prima ha scelto $\bar{x}$. La seconda impresa cercherà di massimizzare u_2 fissato $\bar{x}$ e questo massimo si ha per (i conti sono sempre gli stessi) $y = \frac{a-\bar{x}-k}{2}$ (l'ascissa del vertice della parabola). Il fatto che l'impresa 2 massimizzerà il suo profitto una volta che le verrà comunicato $\bar{x}$ è a conoscenza della prima impresa, cioè la prima impresa conosce la funzione

$$y(\bar{x}) = \frac{a - \bar{x} - k}{2}$$

e quindi la sua funzione di utilità diventa

$$u_1 = \bar{x}(a - \frac{a - \bar{x} - k}{2} - \bar{x} - k)$$

che dipende solo da $\bar{x}$. Quale $\bar{x}$ sceglierà la prima impresa?

Ovviamente quello che massimizza u_1 e facendo gli stessi conti si ottiene $\bar{x} = \frac{a-k}{2}$ e quindi $\bar{y} = \frac{a-k}{4}$
In questo caso la prima impresa produce la quantità che producevano globalmente le due imprese nella situazione di collusione e la seconda impresa produce la metà. Il prezzo

$$P_C = a - \frac{a-k}{2} - \frac{a-k}{4} = a - \frac{3}{4}(a-k)$$

è più basso del prezzo che si ha quando le scelte sono contemporanee.