Studio Qualitativo di Funzione

Reperire un certo numero di informazioni, per descrivere a livello *qualitativo* l'andamento di una funzione $y = f(x)$:

1. campo di esistenza *(insieme di definizione)*
2. segno: *per quali* x *risulta* $f(x) \geq 0$ *?*
3. intersezioni con gli assi: $(0, f(0))$, *per quali* x *risulta* $f(x) = 0$
4. comportamento agli estremi del campo di esistenza
5. continuità
6. monotonia
7. massimi e minimi
8. grafico qualitativo

Campo di Esistenza

CAMPO DI ESISTENZA *(insieme di definizione)* è l'insieme di tutti i punti nei quali la funzione è definita.

Nel caso di una funzione *composta* si detemina, caso per caso, tenendo conto degli insiemi di definizioni delle *funzioni base* con le quali la funzione è stata costruita.

ESEMPIO

data la funzione $$y = \frac{1}{\log(4 - x^2)} = f(x)$$

- il logaritmo è definito per
$$4 - x^2 > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-2, +2)$$
- il denominatore deve essere diverso da zero
$$\log(4 - x^2) \neq 0 \;\Rightarrow\; 4 - x^2 \neq 1 \;\Rightarrow\; x \neq \pm\sqrt{3}$$

il campo di esistenza di $y = f(x)$ è l'unione dei tre intervalli

$$(-2, -\sqrt{3})\,,\; (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})\,,\; (+\sqrt{3}, +2)$$

$$(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +2)$$

Comportamento agli Estremi

Se il campo di esistenza D è costituito dall'unione di più intervalli *(limitati o illimitati)* occorre prendere in considerazione separatamente gli estremi di ognuno di questi intervalli.

- *se gli estremi appartengono a D, si calcola semplicemente il valore della funzione in tali punti.*

  ESEMPI

  $$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ D = [0, +\infty[\ ,\ f(0) = \sqrt{0} = 0$$

  $$f(x) = \sqrt{x(1-x)}\ ,\ D = [0,1]\ ,\ f(0) = \sqrt{0} = 0\ ,\ f(1) = \sqrt{0}$$

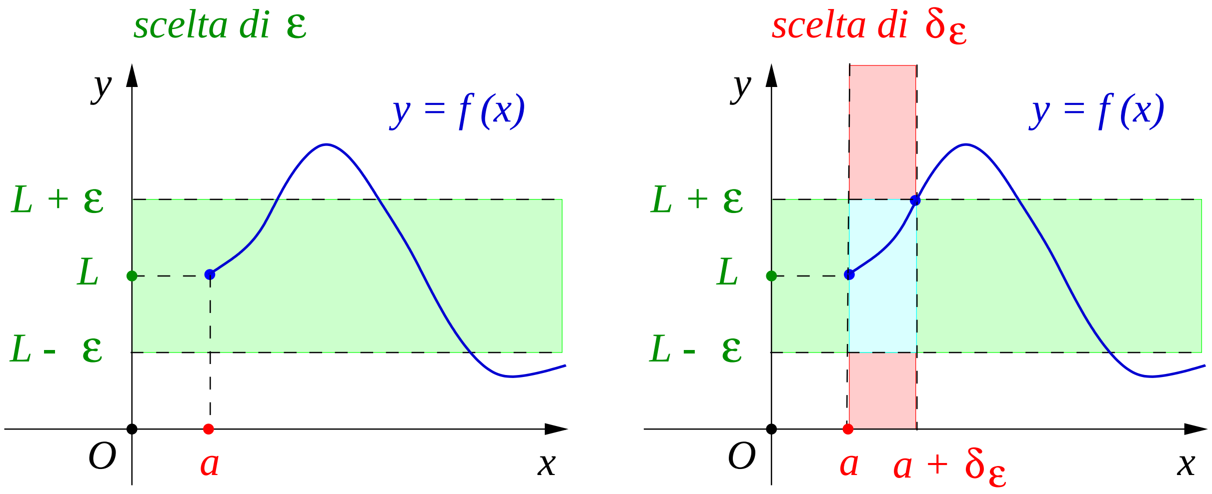
- se gli estremi non appartengono a D è si intoduce il *concetto di limite*

  ESEMPI

  $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{1}{\log(4-x^2)} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Limite Destro $x \to a^+$

- quando la variabile x assume valori "vicini" ad a (sempre maggiori di a), i corrispondenti valori della $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



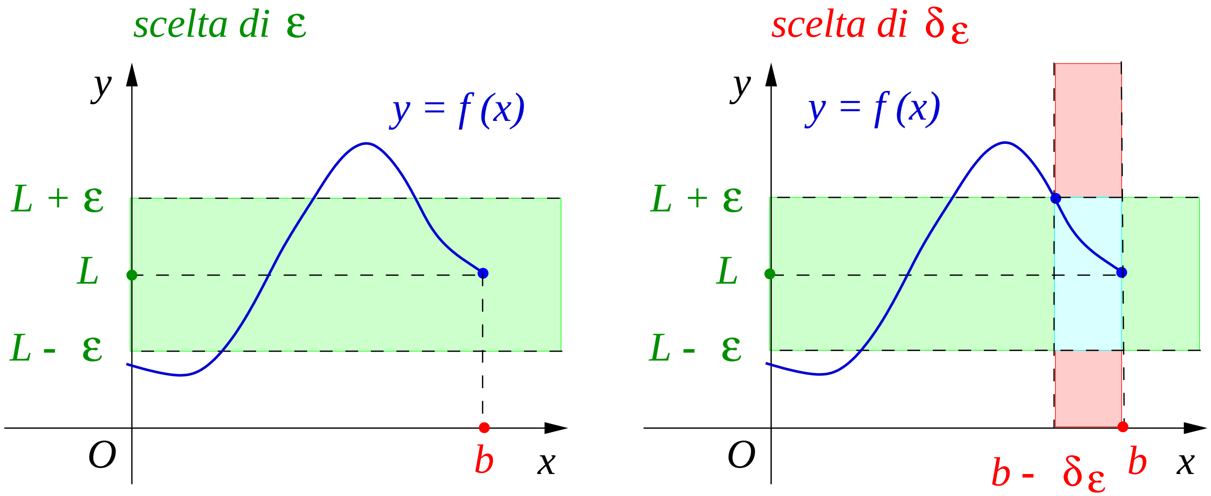
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad \textbf{(limite destro finito)}$$

- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a,\ a + \delta_\varepsilon)$.

- ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$, (2) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = +1$.

Limite Sinistro $x \to b^-$

- quando la variabile x assume valori "vicini" a b (sempre minori di b), i corrispondenti valori della $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L \qquad \textbf{(limite sinistro finito)}$$

- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon,\ b)$.

- ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$, (2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Limiti per $x \to x_0$

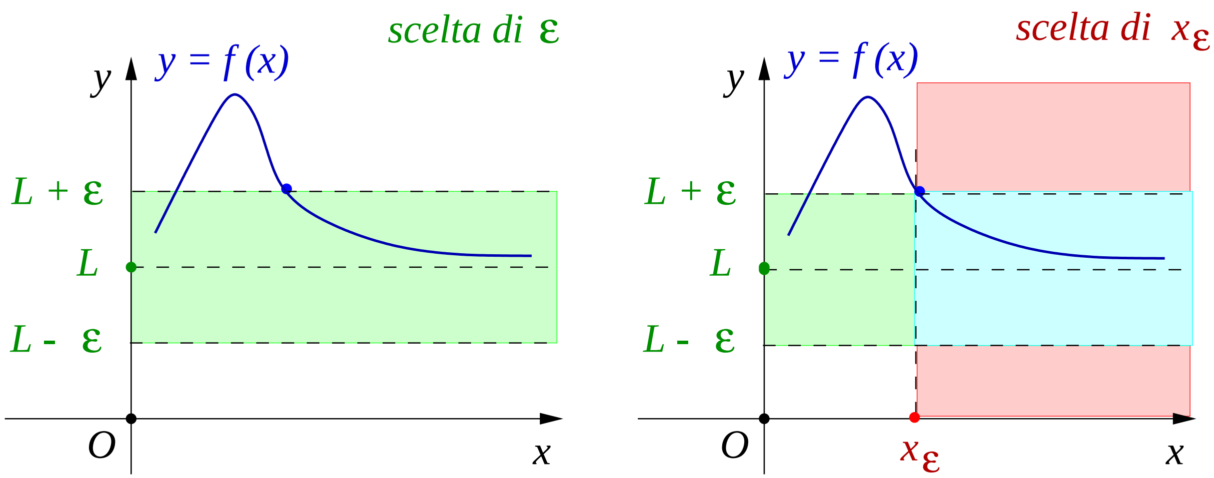
- se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \textbf{(limite finito)}$$

- quando la variabile x assume valori “vicini” ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori della $f(x)$ sono “vicini” al valore L .
- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ con $x \neq x_0$.
- ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 3} (5x - 9) = 6$, (2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limiti per $x \to +\infty$

quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori della $f(x)$ sono "vicini" al valore L.

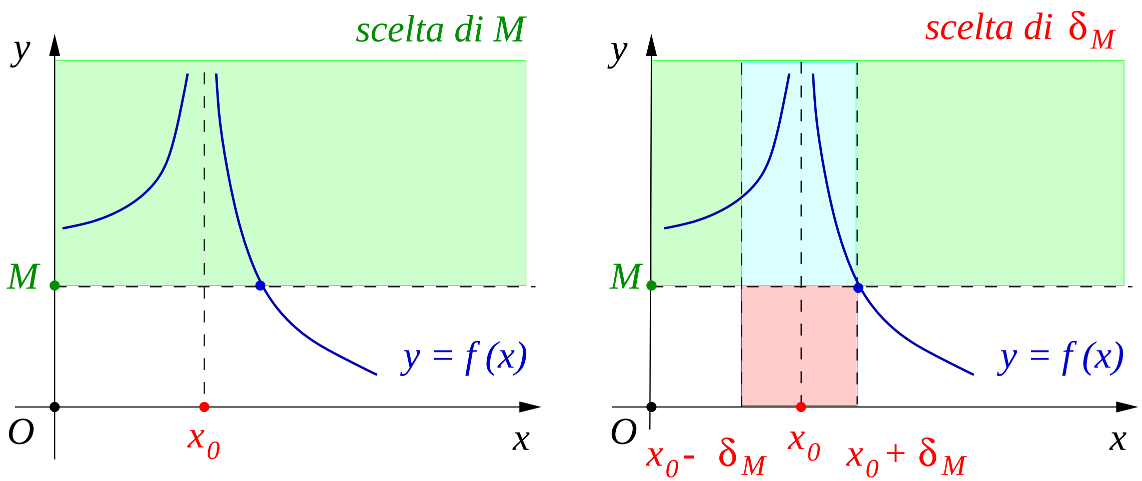


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \textbf{(limite finito)}$$

ESEMPI: (1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, (2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $[x_\varepsilon = -\log \varepsilon]$.

Ancora un limite

quando la variabile x assume valori “vicini” ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori della $f(x)$ crescono arbitrariamente.



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \textbf{limite infinito}$$

ESEMPI: (1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \ [\delta_M = \frac{1}{\sqrt{M}}]$.

$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.
  Infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$
  (limite destro e limite sinistro diversi).
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.
  Infatti $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
  (limiti destro e sinistro infiniti di segno opposto).
- *funzione di Dirichlet.* Non esiste il limite per $x \to 0$.

Osservazioni - Limiti per $x \to x_0$

- poichè nella definizione di limite $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 0 \text{ e } \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Ampliamento di $\mathbb{R}$

Ci chiediamo ora cosa succede alle operazioni aritmetiche sui limiti quando i limiti non sono finiti, in altre parole ci chiediamo se possiamo dare un "significato" ad alcune operazioni in cui compaia l'infinito.

OPERAZIONI: per $\forall\, c \in \mathbb{R}$ si possono definire le operazioni

1. $+\infty + c = +\infty\ , \quad -\infty + c = -\infty$
   (Questo significa che qualunque sia la funzione $f(x)$, che per $x \to x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione $g(x)$, che per $x \to x_0$ tende a c, allora $f(x) + g(x)$ per $x \to x_0$ tende a $+\infty$ e analogamente per $-\infty$).
2. $+\infty + \infty = +\infty\ , \quad -\infty - \infty = -\infty$
3. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\ , \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\ , \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
4. $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$

   (tutte le operazioni precedenti sono commutative).
5. se inoltre $c \neq 0$

$$(+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Forme Indeterminate

FORME INDETERMINATE: restano inderterminate le operazioni

$$+\infty - \infty\ , \quad 0 \cdot (\pm\infty)\ , \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\, , \quad \frac{0}{0}\, , \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se per $x \longrightarrow x_0$ $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0, da questa unica informazione non si può concludere il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0.

Esempio :$x_0 = 0$

$f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$ si ha che sia $f(x)$ che $g(x)$ per $x \longrightarrow x_0$ tendono a 0 $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende $+\infty$, $\frac{g(x)}{f(x)}$ tende 0, $\frac{h(x)}{f(x)}$ tende 2,

Operazioni sui Limiti

- Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni risulta rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle *forme indeterminate*.
- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ allora si ha:

  SOMMA: $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$

  PRODOTTO: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$

  QUOZIENTE: $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$

  VALORE ASSOLUTO: $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\alpha|$

- Tale risultato continua a valere anche se

  $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ o $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Limite di Funzione Composta

- LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA: siano $y = f(x)$, $z = g(y)$ due funzioni, per cui abbia senso $z = g(f(x))$, tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \ , \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

e $f(x) \neq y_0$ in un intorno di $(x_0 - \rho \ , \ x_0 + \rho)$, allora si ha che:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L \quad .$$

- ESEMPI:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{5x+3} = +\infty \ , \quad \lim_{x \to 0} \log(3x+1) = 0 \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(e^{-x})^2} = +\infty.$$

Limiti Fondamentali

- dati i due polinomi, rispettivamente di grado p e q,

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \cdots b_1 x + b_0$$

si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se} \quad p = q \\ 0 & \text{se} \quad p < q \\ +\infty & \text{se} \quad p > q \quad \text{e} \quad \dfrac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad p > q \quad \text{e} \quad \dfrac{a_p}{b_q} < 0 \end{cases}$$

- ESEMPI:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11} = \frac{4}{7} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^7} + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8} = +\infty.$$

- ESEMPI:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4} \quad \textit{lo risolvo ponendo} \quad t = e^x.$$

Limiti Fondamentali

LIMITE 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1.$$

LIMITE 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

LIMITE 3:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{se} \quad a > 1. \end{cases}$$

LIMITE 4:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \ , \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \ , \quad a > 1$$

LIMITE 5:

$$\lim_{x \to +\infty} x^p \ b^x = 0 \ , \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \ , \quad 0 < b < 1$$

LIMITE 6:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^p x}{x^\alpha} = 0 \ , \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \ , \quad \forall \ \alpha > 0.$$

LIMITE 7:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ \log^p x = 0 \ , \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \ , \quad \forall \ \alpha > 0.$$

Funzioni Continue

- CONTINUITÀ IN UN PUNTO: la funzione $y = f(x)$ si dice *continua* nel punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- CONTINUITÀ IN UN INTERVALLO: la funzione $y = f(x)$ è *continua* in un intervallo $[a,\ b]$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ \forall x_0 \in (a,\ b)\ ,\quad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)\ e\ \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

- GRAFICAMENTE: una funzione definita su un intervallo è *continua* se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue - Operazioni

- SOMMA, PRODOTTO, QUOZIENTE

  Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue è una funzione continua.

  Dunque se $y = f(x)$, $y = g(x)$ sono continue in x_0, ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, si ha:

  1. $y = f(x) + g(x)$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$.
  2. $y = f(x)g(x)$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$.
  3. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$,
     (i denominatori devono essere diversi da zero).

- FUNZIONE INVERSA

  Se f è continua ed invertibile allora anche la *funzione inversa* f^{-1} risulta continua.

Funzioni Continue - Esempi

risultano *continue* nei rispettivi *campi di esistenza*:

1. le funzioni potenza ad esponente reale $y = x^b$
2. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
3. le funzioni razionali *(quozienti di due polinomi)*
4. le funzioni esponenziali $y = a^x$ e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$)
5. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x, \ldots$ e le loro inverse
6. $\cdots$

Continuità della Funzione Composta

- FUNZIONE COMPOSTA:

  supponiamo che:

  – $y = g(x)$ continua in x_0, ovvero $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

  – $y = f(x)$ continua in $y_0 = g(x_0)$, ovvero $\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

  allora $f \circ g$ è continua in x_0, ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

- ESEMPI :

  $y = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $y = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ *sono continue ove sono definite*

Limite di Funzioni Composte

Cosa si può dire del *limite della funzione composta* e della continuità della funzione composta ?

1. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2$, $\lim_{x \to 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$
2. usando la continuità della funzione $y = \sqrt{x}$ posso dire:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x}} = 2$$

3. dovendo calcolare il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4}$$

faccio il seguente cambio di variabile: $t = e^x$, $\lim_{x \to +\infty} t = \lim_{x \to +\infty} e^x$ e mi riconduco al calcolo del limite:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^3 + 5t}{2t^3 - t^2 + 4}$$

Esempi di Discontinuità

ESEMPIO 1: $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \ \ f(0) = 1.$

ESEMPIO 2: $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$y = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ +1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \ \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1.$

ESEMPIO 3: $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \ \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$

ESEMPIO 4: $\lim_{x\to 0} = +\infty$

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 5: $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$