Dispersione

si cercano indici di dispersione che:

- utilizzino tutti i dati $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$
- siano basati sulla nozione di *scarto* *(distanza)* dei dati
  - rispetto ad un centro $d_i = |x_i - C|$
    ad es. rispetto alla media aritmetica $d_i = |x_i - \bar{x}|$
  - rispetto a un dato $d_i = |x_i - x_j|$

con alcune proprietà generali:

- non deve mai essere negativo
- assume valore 0 se i dati sono tutti uguali
- non cambia se aggiungiamo una costante ai dati

Varianza - 1

VARIANZA : è la media aritmetica *(semplice o ponderata)* dei quadrati degli scarti

- dato l'insieme di valori $\{ x_1 \; x_2 , \ldots \; x_n \}$

$$Var = s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

- dato l'insieme di valori $\{ x_1 , x_2 , \ldots \; x_m \}$ con le rispettive frequenza assolute $\{ f_1 , f_2 \ldots f_m \}$

$$Var = s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 \qquad \left[n = \sum_{i=1}^{m} f_i \right]$$

Deviazione Standard

DEVIAZIONE STANDARD *(scarto quadratico medio)* :

è la radice quadrata positiva della varianza

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{o} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$$

consente di avere un indice di dispersione espresso nella stessa unità di misura dei dati

NOTA applicando una trasformazione lineare ai dati

$$y_i = a\,x_i + b \;\Rightarrow\; s_y^2 = a^2\,s_x^2 \quad s_y = |a|\,s_x$$

Statistiche Campionarie

Spesso gli *indici statistici* vengono applicati non all'intera *popolazione* ma a un suo *campione*. Si cerca di stimare (*inferenza)* nel miglior modo possibile le caratteristiche dell'intera popolazione a partire dalle informazioni desunte da un *campione rappresentativo*. In questo caso si utilizzano le seguenti formule modificate:

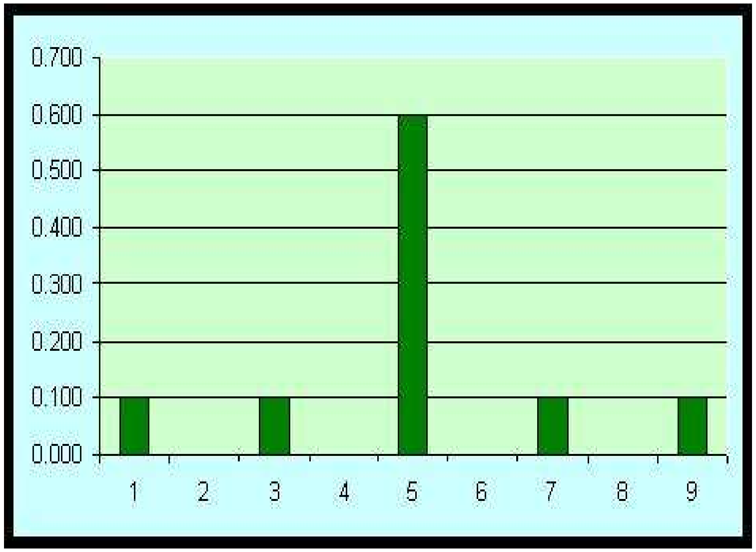
VARIANZA CAMPIONARIA *(stimata)* :

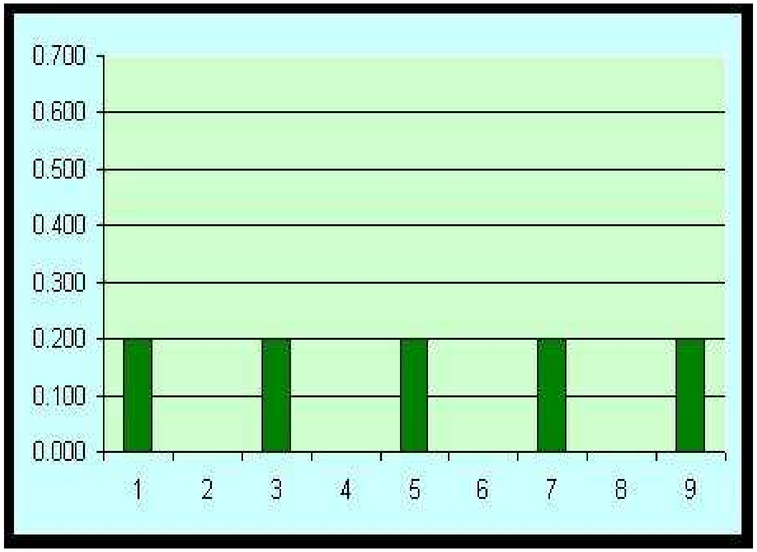
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

DEVIAZIONE STANDARD CAMPIONARIA *(stimata)* :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Esempio riassuntivo - 1





Esempio riassuntivo 2

Caso A

x_i	f_i	f_i/n
1	1	0.100
3	1	0.100
5	6	0.600
7	1	0.100
9	1	0.100
	10	1.000

media	5.00
mediana	5.00
varianza	4.00
varianza stimata	4.44
deviazione standard	2.00
deviazione standard stimata	2.11

Caso B

x_i	f_i	f_i/n
1	2	0.200
3	2	0.200
5	2	0.200
7	2	0.200
9	2	0.200
	10	1.000

media	5.00
mediana	5.00
varianza	8.00
varianza stimata	8.89
deviazione standard	2.83
deviazione standard stimata	2.98

Esercizio 1

ESERCIZIO – Trovare media, mediana, moda, varianza e deviazione standard dei seguenti dati non ordinati e non raggruppati. Tracciare l'istogramma delle frequenze.

7	4	10	9	15	12	7	8	11	4
14	10	5	14	1	10	8	12	6	5

Esercizio 1

SOLUZIONE – costruisco la tabella della distribuzione di frequenza

x	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	
f_{ass}	1	2	2	1	2	2	1	3	1	2	2	1	**20**

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1+8+10+6+14+16+9+30+11+24+28+15) = 8.6$$

$$s^2 = \frac{1}{20}(57.76+42.32+25.92+6.76+5.12+0.72+0.16+5.88+$$
$$+5.76+23.12+58.33+40.96) \approx 13.64$$

$s \approx 3.69$

moda $= 10.0$ mediana $= 8.5$

Esercizio 2

ESERCIZIO – Nel rilevare l'altezza in *cm* di un gruppo di reclute si ottenuta la seguente tabella delle frequenze. Calcolare media, mediana e quartili.

(*cm*)	f_{ass}	f_{cum}
166	1	1
168	3	4
169	6	10
170	11	21
171	8	29
172	6	35
173	4	39
174	3	42
175	1	43
178	1	44

- $n = 44$ dimensione del campione
- $\bar{x} \approx 170.9$ media
- $M_e = \dfrac{x_{22} + x_{23}}{2} = 171$ mediana
- $q_1 = \dfrac{x_{11} + x_{12}}{2} = 170$ primo quartile
- $q_3 = \dfrac{x_{33} + x_{34}}{2} = 172$ terzo quartile
- $q_3 - q_1 = 2$ distanza interquartile

La distanza interquartile è un altro indice di dispersione, legato alla nozione di mediana. La mediana suddivide l'insieme dei dati ordinati x_i in due parti ugualmente numerose. I quartili si ottengono suddividendo i dati ordinati in quattro parti ugualmente numerose.

Esercizio 3

ESERCIZIO – Considero la seguente tabella relativa alle frequenze dei pesi in *Kg* di 100 individui adulti.

Peso p *in Kg*	f_{ass}
$50 \leq p < 55$	20
$55 \leq p < 60$	15
$60 \leq p < 65$	18
$65 \leq p < 70$	22
$70 \leq p < 75$	18
$75 \leq p < 80$	7

- le classi sono di uguale ampiezza
- suppongo che i dati siano uniformemente distribuiti all'interno di ogni classe
- posso definire per ogni classe un rappresentante r_i *(class mark)*

Esercizio 3

Peso p *in Kg*	f_i	F_i	r_i
$50 \leq p < 55$	20	20	52.5
$55 \leq p < 60$	15	35	57.5
$60 \leq p < 65$	18	53	62.5
$65 \leq p < 70$	22	75	67.5
$70 \leq p < 75$	18	93	72.5
$75 \leq p < 80$	7	100	77.5

- calcolo la media utilizzando i valori dei rappresentanti
- calcolo lo scarto quadratico medio utilizzando i valori dei rappresentanti

calcolo il peso medio

$$\bar{p} = \frac{1}{100}(20 \cdot 52.5 + 15 \cdot 57.5 + 18 \cdot 62.5 + 22 \cdot 67.5 +$$

$$+ 18 \cdot 72.5 + 7 \cdot 77.5) = 63.7$$

Esercizio 3

calcolo la varianza e lo scarto quadratico medio *(deviazione standard)*

r_i	$r_i - \bar{p}$	$(r_i - \bar{p})^2$	f_i
52.5	-11.2	125.44	20
57.5	-6.2	38.44	15
62.5	-1.2	1.44	18
67.5	3.8	14.44	22
72.5	8.8	77.44	18
77.5	13.8	190.44	7

$$s^2 = \frac{1}{100}(20 \cdot 125.44 + 15 \cdot 38.44 + 18 \cdot 1.44 + 22 \cdot 14.44 +$$

$$18 \cdot 77.44 + 7 \cdot 190.44) \approx 61.56\, Kg^2$$

$s \approx 7.85\, kg$

Media - Varianza - Deviazione Standard

$\bar{x}$ media	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \, x_i$
s^2 varianza	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
s dev. standard	$\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$
s^2 campionaria	$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
s^2 campionaria	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$

Varianza - Deviazione Standard

le espressioni della varianza (e della deviazione standard) possono essere riscritte come segue

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2 \right] \qquad s^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} f_i\, x_i^2 - n\,\bar{x}^2 \right]$$

infatti

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\,x_i\,\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\bar{x}\,(n\,\bar{x}) + n\,\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2$$

Esercizio Voti - 1

Un'indagine su un campione di $n = 100$ studenti, che ha sostenuto la prova scritta di matematica, ha prodotto il seguente risultato. Le votazioni in *centesimi* sono state raggruppate in quattro *classi.*

classe	f_i	f_i/n
$20 - 40$	10	0.10
$40 - 60$	20	0.20
$60 - 80$	50	0.50
$80 - 100$	20	0.20
	100	1.00

Le classi sono di uguale ampiezza e contigue

Esercizio Voti - 2

Nell'ipotesi di *distribuzione uniforme*, è naturale associare a ciascuna classe, come *rappresentante* , il valore centrale r_i della classe stessa.

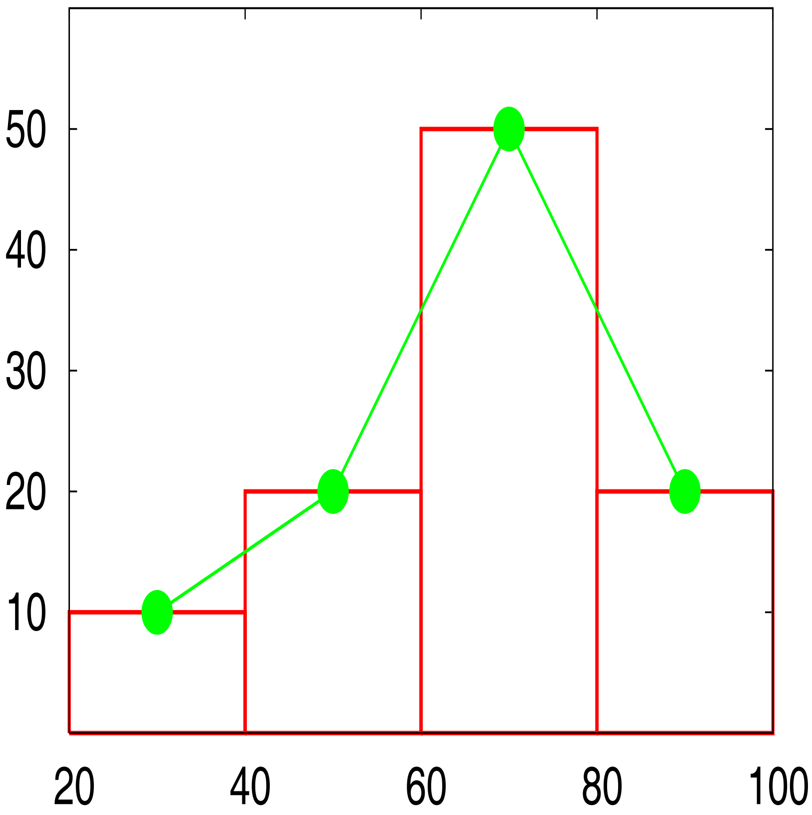
classe	r_i	f_i	F_i
20 – 40	30	10	10
40 – 60	50	20	30
60 – 80	70	50	80
80 – 100	90	20	100

$$media = \frac{1}{100} \cdot (10 \cdot 30 + 20 \cdot 50 + 50 \cdot 70 + 20 \cdot 90) = 66$$

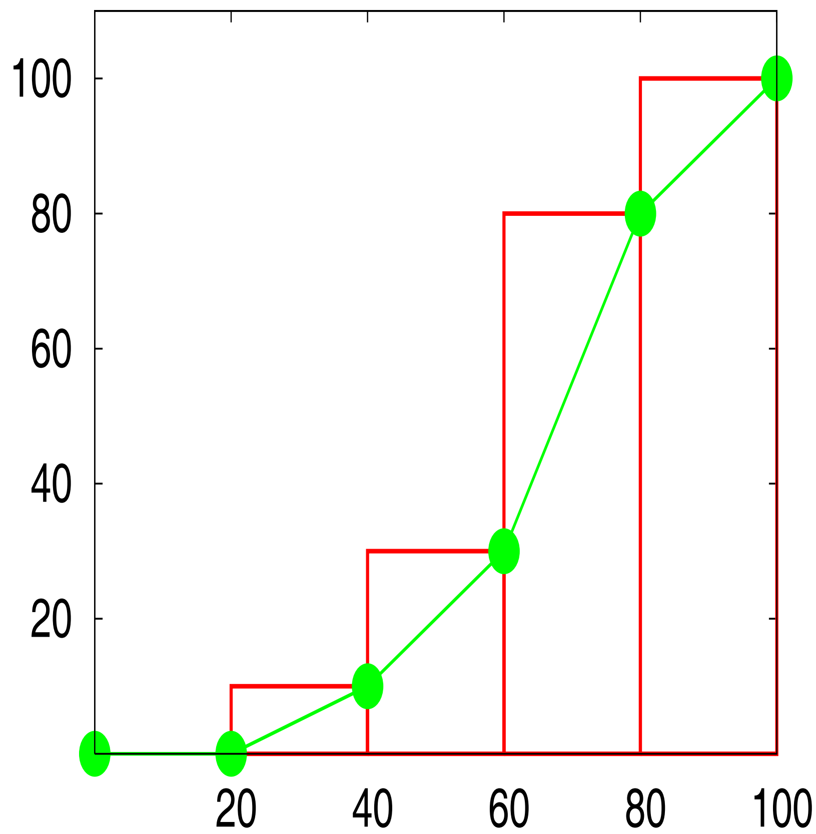
$mediana = 70$ guardando solo i rappresentanti

$$varianza = \frac{1}{100} \cdot (10 \cdot 36^2 + 20 \cdot 16^2 + 50 \cdot 4^2 + 20 \cdot 24^2) = 21.44$$

Eesercizio Voti - 3

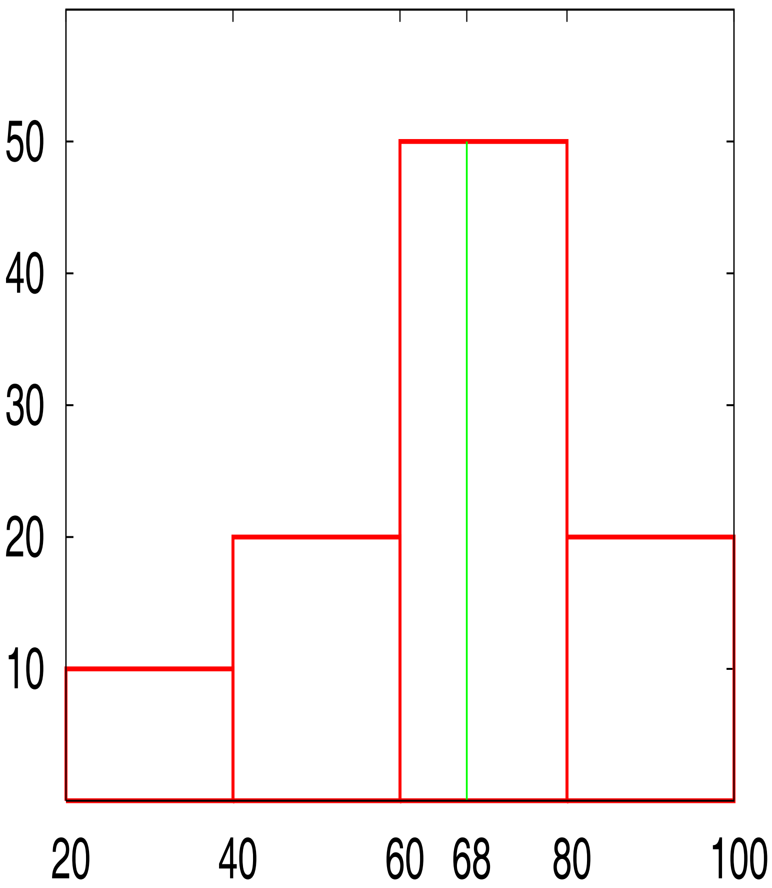


POLIGONO DELLE FREQUENZE



OGIVA DI FREQUENZA

Esercizio Voti - 4



CALCOLO DELLA MEDIANA

area totale

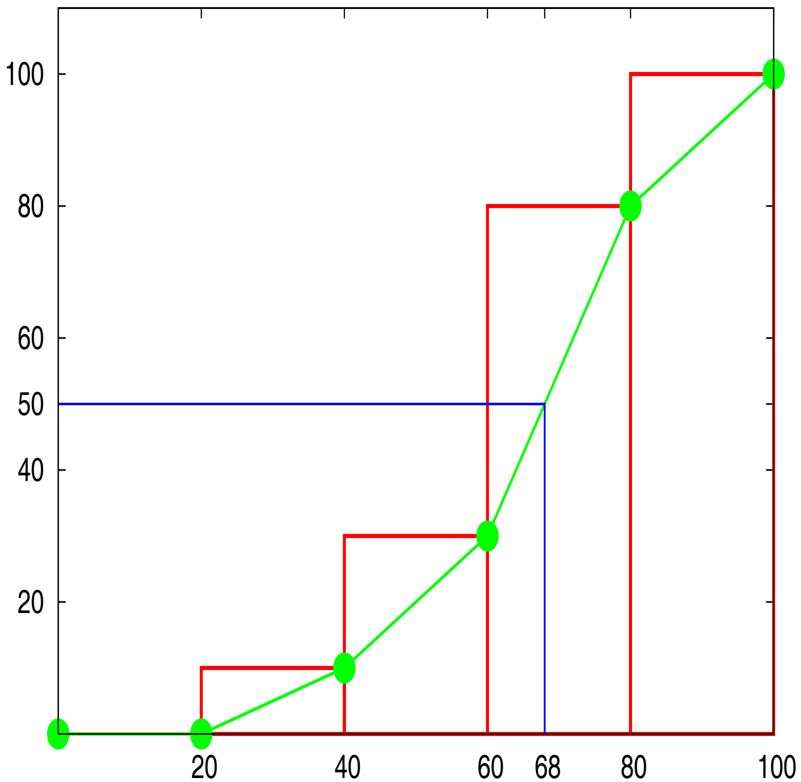
$20 \cdot (10 + 20 + 50 + 20) = 2000$

cerco il valore $x = M_e$ tale che

$20 \cdot 10 + 20 \cdot 20 + (x - 60) \cdot 50 = 1000$

$\Rightarrow \ x = 68 \ \Rightarrow \qquad M_e = 68$

Esercizio Voti - 5



CALCOLO DELLA MEDIANA

interpolazione lineare sui punti

$A = (60, 30)$ $B = (80, 80)$

$$\begin{cases} y & = 50 \\ y - 30 & = \dfrac{5}{2} \cdot (x - 60) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (50 - 30) = \frac{5}{2} \cdot (x - 60)$$

$$\Rightarrow \quad x = 68 \quad \Rightarrow \qquad M_e = 68$$

DOMANDE

- qual è il voto massimo preso dal 10% degli studenti ? [40]
- calcolare i quartili dall'ogiva di frequenza $[q_1 = 55\,,\, q_2 = 78]$

Esercizio Voti - 6