Successioni 1

- vi sono fenomeni naturali e situazioni concrete che presentano sviluppi significativi in tempi discreti
- vale a dire è naturale che i controlli per quei dati fenomeni o per quelle date situazioni avvengano ad intervalli di tempo prefissati (di minuti, ore, giorni, anni, . . .)
- ESEMPI:

  1. aumento dello stipendio di un lavoratore dipendente per effetto degli scatti di anzianità;
  2. crescita di un capitale investito ad un tasso fisso di interesse annuo;
  3. crescita di una popolazione di cellule;
  4. decadimento di una sostanza radioattiva.

Successioni 2 - Progressioni Aritmetiche

ESEMPIO 1: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del datore di lavoro)

- $S(0) = S$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari al 1.5% dello stipendio iniziale
- dopo un anno lo stipendio sarà $S(1) = S + \frac{1.5}{100}\, S$
- dopo 2 anni lo stipendio sarà $S(2) = S(1) + \frac{1.5}{100}\, S = S + 2\,\frac{1.5}{100}\, S$
- dopo n anni lo stipendio sarà

$$S(n) = S + n\,\frac{1.5}{100}\, S = S + nd \qquad \left(d = \frac{1.5}{100}\, S\right)$$

- si dice successione una corrispondenza che ad ogni intero n associa un valore $S(n)$

$$S(n) = S + n\ d \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \textit{progressione aritmetica}$$

Successioni 3 - Progressioni Geometriche

ESEMPIO 2: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del dipendente)

- $C(0) = C$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari al 1.5% dello stipendio dell'anno precedente
- dopo un anno $C(1) = C + \frac{1.5}{100}\, C = C\ (1 + \frac{1.5}{100})$
- dopo 2 anni

$$C(2) = C(1) + \frac{1.5}{100}\, C(1) = C(1)(1 + \frac{1.5}{100}) = C\ (1 + \frac{1.5}{100})^2$$

- posto $q = 1 + \frac{1.5}{100}$, dopo n anni lo stipendio sarà

$$C(n) = C\ q^n \quad , \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad \textit{progressione geometrica}$$

Modelli di Crescita e Decadimento - 1

CRESCITA CELLULARE

In particolari condizioni, dopo un certo intervallo temporale, una cellula si suddivide in due nuove cellule *(dicotomia della cellula)*. Queste a loro volta raddoppiano dopo un intervallo di tempo uguale al precedente.

Assumendo come unità di misura dei tempi il cosiddetto *tempo di raddoppio*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(0) = 1\,, \quad K(n) = 2 \cdot K(n-1) = 2^n$$

$K(n)$ numero delle cellule dopo n tempi di raddoppio.

ESERCIZIO : Il tempo necessario per una suddivisione di una cellula è di 5 giorni. Calcolare il numero di cellule dopo 60 giorni partendo da un'unica cellula iniziale.

Si osservi che 60 giorni corrispondono a 12 tempi di raddoppio. Il numero delle cellule sarà

$$K(12) = 2^{12} = 4096 \approx 4000$$

nota: può essere utile ricordare che $2^{10} = 1024 \approx 1000$.

Modelli di Crescita e Decadimento - 2

DECADIMENTO RADIOATTIVO

Le sostanze radioattive *decadono* progressivamente. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto *semiperiodo* o *tempo di dimezzamento*, che rappresenta il tempo necessario perchè il numero degli atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato.

Assumendo come unità di misura dei tempi il *tempo di dimezzamento*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(n) = 0.5 \cdot K(n-1) = (0.5)^n \cdot K(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot K(0)$$

$K(n)$ quantità di sostanza radioattiva dopo n tempi di dimezzamento a partire da una quantità iniziale $K(0)$.

ESERCIZIO : Dopo quanti tempi di dimezzamento una sostanza radioattiva si è ridotta a meno di $1/4$ (cioè a meno del 25%) o a meno di $1/1000$ della quantità iniziale ?

$$K(n) = (0.5)^n K(0) \leq 0.25\ K(0) \ \Rightarrow\ n = 2$$

$$K(n) = (0.5)^n K(0) \leq 0.001\ K(0) \ \Rightarrow\ n = 10$$

Successioni 5 - Definizione

- una successione una corrispondenza (*legge*) che ad ogni naturale n associa un valore $a(n) = a_n$
- è definita da una sequenza ordinata di numeri $\{a_1 \, , \, a_2 \, , \, a_3 \, , \cdots \, a_n \, , \cdots\}$ a_n si dice termine generale della successione $\{a_n\}$
- ESEMPI *(come si definisce una successione)*:

  assegnando la legge

1. $a_n = n^2 \qquad \{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\}$
2. $a_n = \frac{1}{n} \qquad \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$

   per ricorrenza

3. $a_n = a_{n-1} \, q \; , \quad a_0 = C \;\; \Rightarrow \;\; a_n = C \; q^n$
4. $a_n = a_{n-1} + d \; , \quad a_0 = S \;\; \Rightarrow \;\; a_n = S + nd$

Successioni 6 - Concetto di Limite

- ESEMPI comportamento di a_n al crescere di n $(n \to \infty)$:

successioni convergenti $a_n \to a$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

1. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$, $a_n = \frac{1}{n} \to 0$
2. $\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots\}$, $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

successioni divergenti $a_n \to \pm\infty$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$

3. $\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$; $a_n = n^2 \to +\infty$
4. $\{-2, -4, -6, -8, \cdots\}$; $a_n = -2\ n \to -\infty$

successioni indeterminate *non esiste il limite*

5. $\{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$; $a_n = (-1)^n$
6. $\{-1, 4, -9, 16, \cdots\}$; $a_n = (-1)^n\ n^2$

ESERCIZIO

Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da 10^4 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 100$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari ad 4000000 cellule? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da 10^4 a 8000000 cellule in 40 giorni?

Soluzione:

1)Dopo n tempi di raddoppio ci sono $2^n \cdot 10^4$ cellule e questo numero deve essere uguale a $4 \cdot 10^6$ quindi n soddisfa l'equazione $2^n \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^6$, cioè $2^n = 4 \cdot 10^2$, $n = \log_2 4 \cdot 10^2$ cioè $n = 2 + 2\log_2 10$ e quindi dopo $100 \cdot (2 + 2\log_2 10)$ giorni si hanno 400000 cellule.

2)Si ha $2^n \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^6$ e quindi $n = 3 + 2\log_2 10$, ma., indicando con x il tempo di raddoppio $40 = x \cdot (3 + 2\log_2 10)$ da cui si ricava x

ESERCIZIO

Una popolazione cellulare è formata ad un certo istante da N_0 individui ed è caratterizzata da un tempo di raddoppio pari a 14 giorni. Dopo quanto tempo la polazione risulterà composta da $10N_0$ individui? Qual è il tempo di raddoppio di un secondo campione che passa da N_0 a $10N_0$ individui in 14 giorni?

Soluzione 1) Si deve avere $2^x \cdot N_0 = 10N_0$ e dunque $2^x = 10$ cioè $x = \log_2 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{1}{\log_{10} 2}$ Quindi il tempo per avere $10N_0$ individui sarà $14 \cdot \frac{1}{\log_{10} 2}$.

2) Il tempo di raddoppio è $\frac{14}{\frac{1}{\log_{10} 2}}$

ESERCIZIO

Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ *da* N_0 *cellule aventi tempo di raddoppio* $T = 10$ *giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari ad* $8N_0$*? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da* N_0 *cellule a* $8N_0$ *cellule in 10 giorni?*

Soluzione 1) Si deve avere $2^x \cdot N_0 = 8N_0$ e dunque $2^x = 8$ cioè $x = 3$
Quindi il tempo per avere $8N_0$ individui sarà $10 \cdot 3 = 30$ giorni.

2) Il tempo di raddoppio è $\frac{10}{3}$giorni