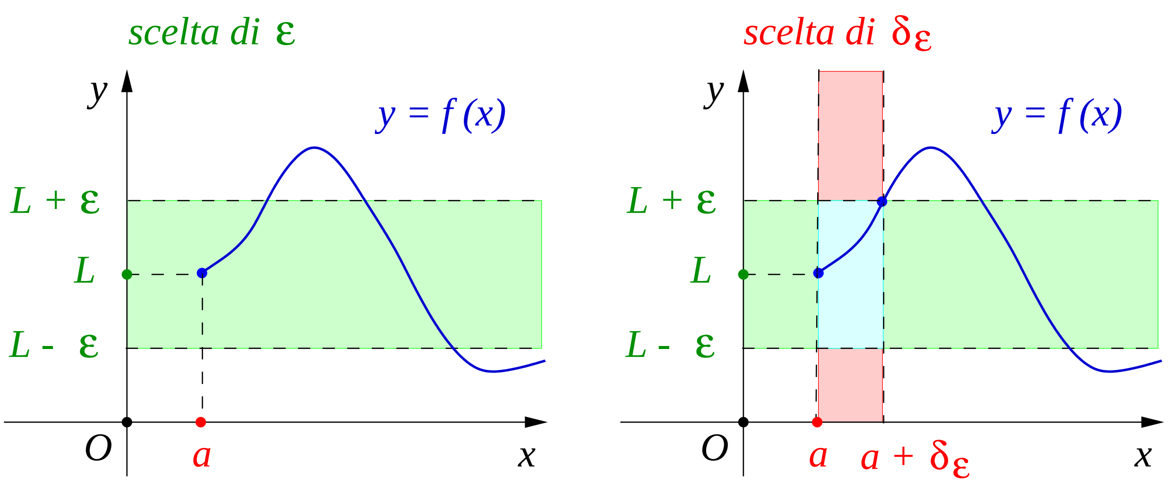
Limite Destro Finito

Quando la variabile x assume valori via via più "vicini" ad a (ma sempre maggiori di a), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite destro finito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

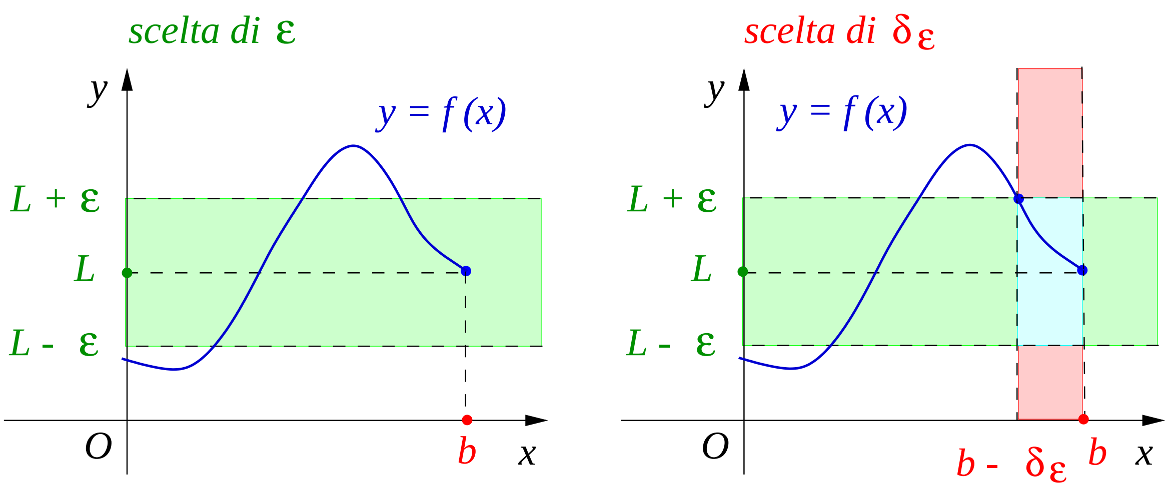
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.

ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ (in questo caso $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$), (2) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$.

Limite Sinistro Finito

Quando la variabile x assume valori via via più "vicini" a b (ma sempre minori di b), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L.



limite sinistro finito

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$.

ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$, (2) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Limite Finito per $x \to x_0$

Se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L, si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \textbf{(limite finito)}$$

Quando la variabile x assume valori “vicini” a x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ sono “vicini” al valore L.

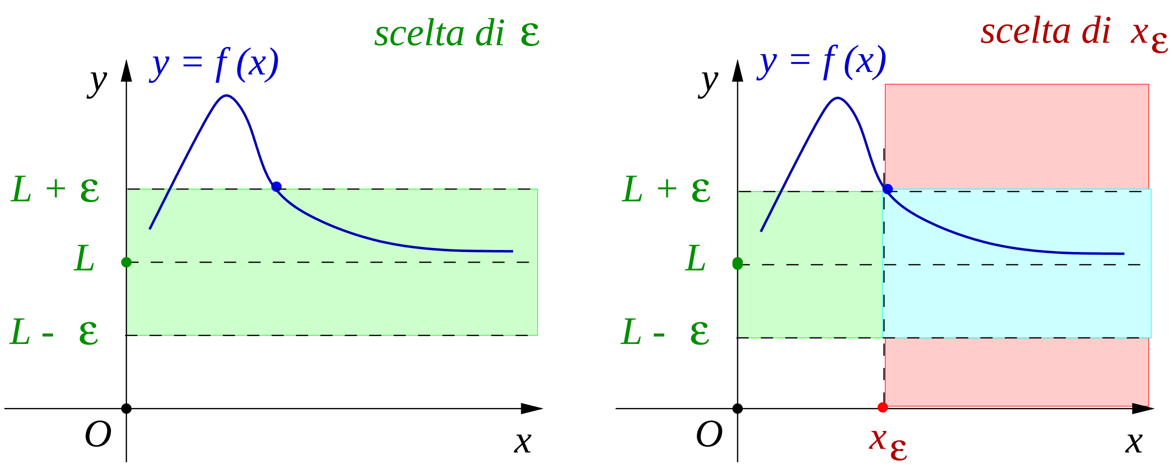
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che
$|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ con $x \neq x_0$.

ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 3} (5x - 9) = 6$, (2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limite Finito per $x \to +\infty$

Quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono sempre più "vicini" al valore L.



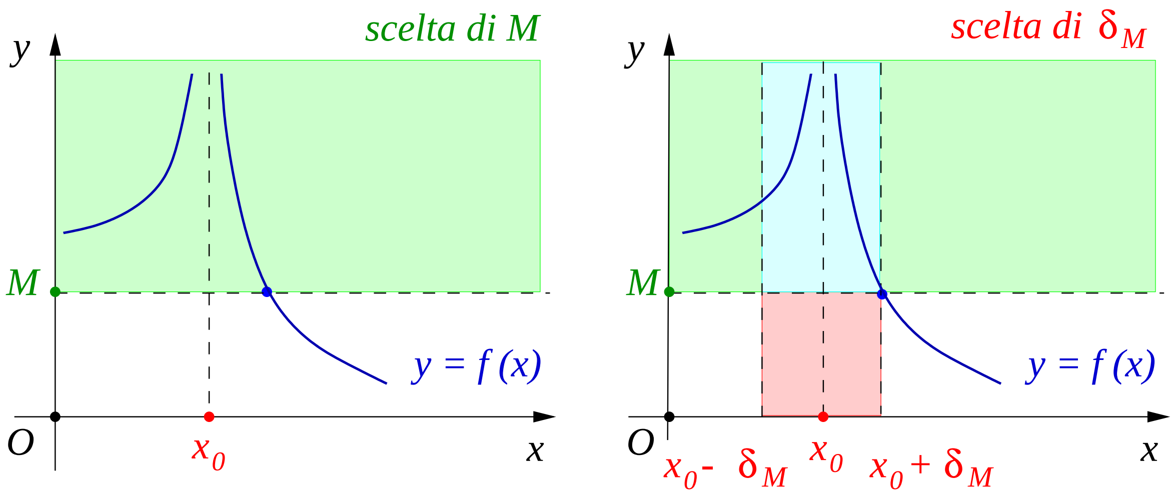
limite finito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

ESEMPI: (1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1\,,$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ $\quad(x_\varepsilon = -\log\varepsilon)$

Ancora un Limite

Quando la variabile x assume valori "vicini" ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ crescono arbitrariamente.



limite infinito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ESEMPI: (1) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \left(\delta_M = \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$

Il Limite Può Non Esistere

Il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, il limite destro e limite sinistro esistono, ma sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1\,.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \to 0$.

  Infatti, i limiti destro e sinistro sono infiniti di segno opposto:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,.$$

- $f(x) = \sin x$. Non esiste il limite per $x \to +\infty$.

Osservazioni sui Limiti per $x \to x_0$

Poiché nella definizione di limite si richiede $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 1\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \qquad g(0) = 0\,, \text{ ma } \lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

Alcuni Limiti da Ricordare

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

- $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

- $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \alpha + \beta$
- prodotto: $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \alpha \cdot \beta$
- quoziente: se $\beta \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Operazioni sui Limiti

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora si ha:

- somma: $\lim_{x\to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = +\infty$
- prodotto: se $\alpha \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
- quoziente: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

  In particolare, si ha che $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ oppure $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Ampliamento di $\mathbb{R}$

Per $c \in \mathbb{R}$ definiamo le seguenti operazioni:

- $+\infty + c = +\infty\,, \qquad -\infty + c = -\infty$

  Questo significa che qualunque sia la funzione f che per $x \to x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione g che per $x \to x_0$ tende a c, allora $f + g$ per $x \to x_0$ tende a $+\infty$. Analogamente per $-\infty$.

- $+\infty + \infty = +\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$
- se inoltre $c \neq 0$,

$$(+\infty)\cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad (-\infty)\cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $$\lim_{x\to+\infty} -2\left(3+\frac{1}{x}\right)$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \left(2-e^{-x}\right)$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^{-x}}{3+\frac{1}{x}}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{x}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^{x}}$$

Forme Indeterminate

Restano indeterminate le operazioni:

$$+\infty - \infty\,, \quad 0 \cdot (\pm\infty)\,, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad \frac{0}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\dfrac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \to x_0$, da questa unica informazione non si può dedurre qual è il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0.

ESEMPIO: consideriamo $f(x) = x\,,\ g(x) = x^3\,,\ h(x) = 2x\,.$

Si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0.$

Tuttavia, $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{f(x)} = 2\,.$

Limite di un Polinomio all'Infinito

Sia $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio di grado $m \geq 1$. Allora:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_m x^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_m > 0\,, \\ -\infty & \text{se } a_m < 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_m x^m = \ldots$$ (dipende dal segno di a_m e dalla parità di m)

Il comportamento all'infinito di un polinomio è determinato dal termine di grado massimo.

Esempi: (1) $$\lim_{x\to+\infty} (2x^3 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty} (-x^4 + x^3 - x^2) = \lim_{x\to-\infty} -x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Limiti Fondamentali

Dati due polinomi di grado m e n

$$\begin{aligned} P(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0 \\ Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

si ha:

- se $m = n$, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m}{b_n}$;
- se $m < n$, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$;
- se $m > n$ e $\displaystyle \frac{a_m}{b_n} > 0$, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$;
- se $m > n$ e $\displaystyle \frac{a_m}{b_n} < 0$, $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$.

Limiti Fondamentali – Esempi

Calcolare i seguenti limiti:

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+5x+3}{7x^3-x^2+11}$$
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+5x^2+3}{x^5-3x^4+2x^2}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^7}+10x-8}{x^2+3x+8}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+5e^x}{2e^{3x}-e^{2x}+4}$$

  (si può risolvere ponendo $t=e^x$)

Altri Limiti Fondamentali

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N},\ a>1$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log^p x}{x^n}=0 \quad \forall\, p,n\in\mathbb{N}-\{0\}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n\log^p x=0 \quad \forall\, p,n\in\mathbb{N}-\{0\}$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to +\infty} x^5 2^x \qquad \lim_{x\to 0^+} x^9\log x \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+1)}{x^2}$$