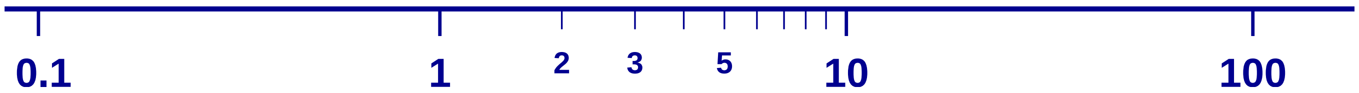
Scale Logaritmiche

SCALA LOGARITMICA:

- sull'asse prescelto *(ad esempio, l'asse x)* si rappresenta il punto di ascissa $1 = 10^0$
- nella direzione positiva si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa 10^1, 10^2, 10^3, ...
- nella direzione negativa si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ...
- i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva (ad esempio, 2, 3, ..., 9) sono posizionati in corrispondenza dei valori dei rispettivi logaritmi decimali



APPLICAZIONI:

- rappresentare misure *positive* con ordini di grandezza molto diversi fra loro
- linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ *(scale semilogaritmiche)*
- linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ *(scale logaritmiche)*

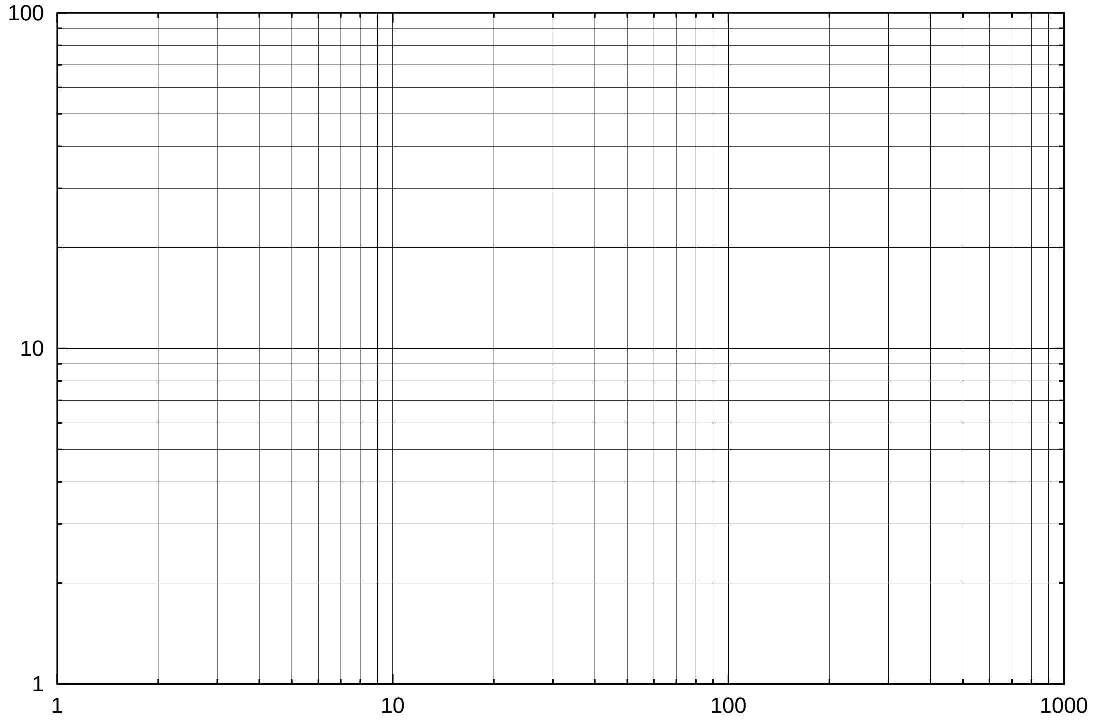
Carta SemiLogaritmica

CARTA SEMILOGARITMICA:
scala lineare sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y (o viceversa)

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI:

$X = x \qquad Y = \log_{10} y$

Carta Logaritmica



CARTA LOGARITMICA: scala logaritmica sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI: $X = \log_{10} x \qquad Y = \log_{10} y$

Carte SemiLogaritmiche

Data la funzione esponenziale

$$y = K \cdot a^x ,$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

$$\log_{10} y = \log_{10} [\, K \cdot a^x \,] \;\Rightarrow\; \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

Ponendo $X = x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a ,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carte Logaritmiche

Data la funzione potenza

$$y = K \cdot x^b ,$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

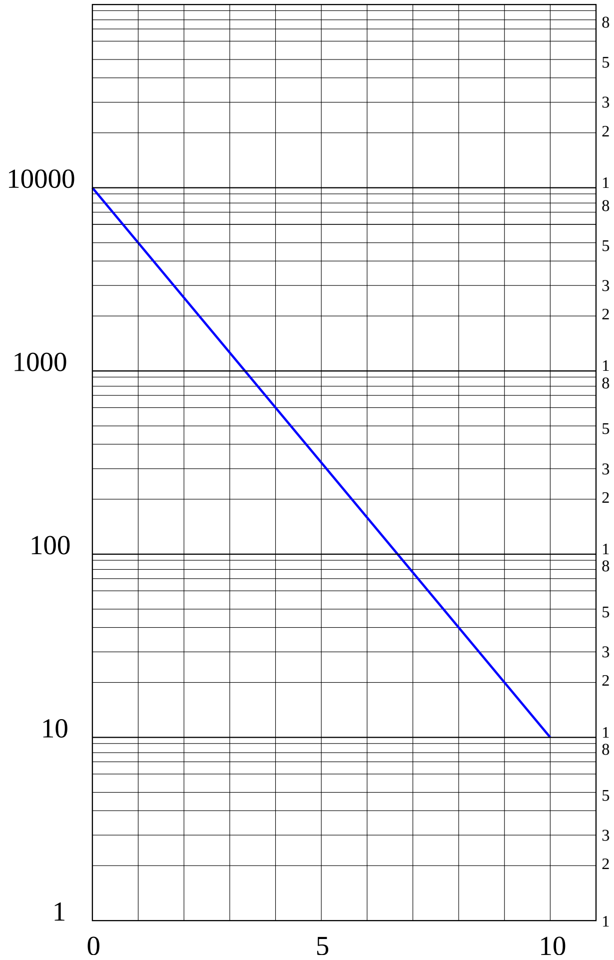
$$\log_{10} y = \log_{10} [\, K \cdot x^b \,] \ \Rightarrow \ \log_{10} y = \log_{10} K + b \cdot \log_{10} x$$

Ponendo $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + b \cdot X \,,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carta SemiLogaritmica – Esempio



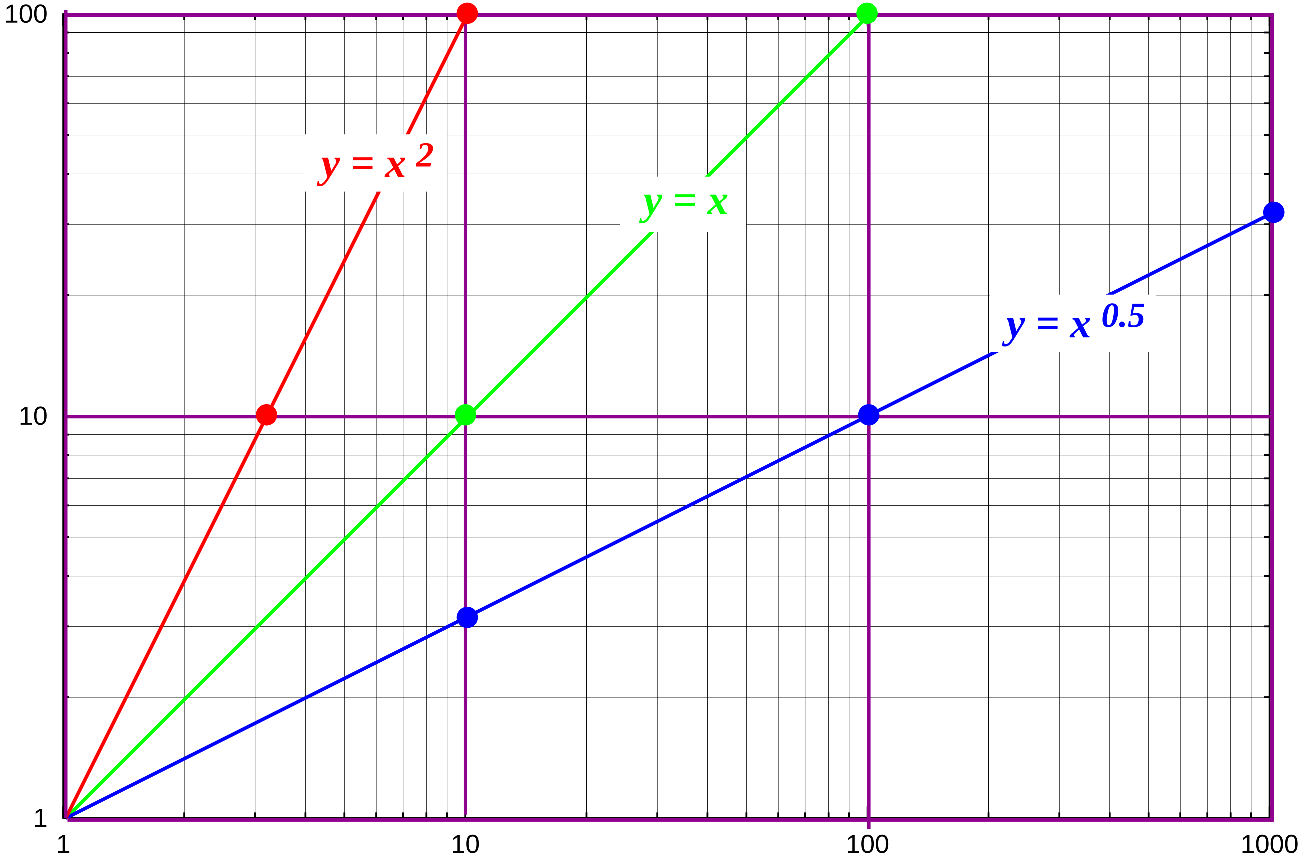
$$y = 10.000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\log y = \log(10.000) + x \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$Y = 4 - X \cdot \log 2$$

$$\log 2 \simeq 0,3$$

Carta Logaritmica – Esempio



Esercizi

Esercizio 1. **(a)** In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 2 + (\log_{10} 3)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.
(b) Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta, su tale scala, la funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = -\log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 3^x - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{3^x}{2}$

da cui $y = \frac{3^x}{2}$.

(b) $\log_{10} y = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x \cdot \log_{10} \frac{1}{3}$

da cui $Y = \left[\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)\right] x$ con $m = -\log_{10} 3 < 0$.

Esercizi

Esercizio 2. **(a)** In un grafico in scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 2 + (\log_{10} 3)x$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y.

(b) Rispondere alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + 2X$, dove $X = \log_{10} x$.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = \log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10}(2 \cdot 3^x)$,

da cui $y = 2 \cdot 3^x$.

(b) $\log_{10} y = -\log_{10} 5 + 2\log_{10} x = \log_{10} \dfrac{x^2}{5}$,

da cui $y = \dfrac{x^2}{5}$.

Esercizio 3. **(a)** Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)x$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y.

(b) Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = \log_{10} 3 + x \cdot \log_{10} 4 = \log_{10}(3 \cdot 4^x)$,

da cui $y = 3 \cdot 4^x$.

(b) $\log_{10} y = \log_{10} 5 + \dfrac{3}{2} \log_{10} x = \log_{10}(5x^{\frac{3}{2}})$,

da cui $y = 5x^{\frac{3}{2}}$.

Esercizi

Esercizio 4. In un grafico con scala logaritmica *(scala logaritmica sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate)*

(a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -3X + 5$. Trovare il legame funzionale tra x e y, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$;

(b) scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = (\sqrt{2x})^3$.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = -3 \log_{10} x + 5$, da cui

$$y = 10^{-3 \log_{10} x + 5} = 10^5 (10^{\log_{10} x})^{-3} = \frac{10^5}{x^3}, \qquad \text{cioè} \qquad y = \frac{100.000}{x^3}.$$

(b) $\log_{10} y = \log_{10} (2x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 2x$, quindi la retta è

$$Y = \frac{3}{2} X + \frac{3}{2} \log_{10} 2.$$

Esercizio 5. In un grafico con scala semilogaritmica *(scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate)*

(a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$;

(b) trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

(a) $\log_{10} y = x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2^x - \log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{2^x}{5}$,

da cui $y = \dfrac{2^x}{5}$.

(b) $\log_{10} y = \log_{10} \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = x \log_{10} \left(\dfrac{3}{5}\right)$, cioè $Y = (\log_{10} \frac{3}{5})X$. Quindi il coefficiente angolare è $\log_{10} \frac{3}{5} < 0$.

Esercizi

Esercizio 6. **(a)** Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \sqrt{2x^5}$.
(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = -2X + 5$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle doppiamente logaritmiche. La retta è $Y = \frac{1}{2}\log_{10} 2 + \frac{5}{2}X$.

(b) $y = \dfrac{10^5}{x^2}$

Esercizio 7. **(a)** Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \frac{4}{10^{5x}}$.
(b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta $Y = 3 - 7X$?

Soluzione: (a) Le coordinate opportune sono quelle semilogaritmiche. La retta è $Y = \log_{10} 4 - 5X$.

(b) $y = 10^3 \left(\dfrac{1}{10^7}\right)^x$