Avviso Importante

Le lezioni di matematica termineranno prima di Natale, pertanto saranno svolte 8 ore di lezione nelle seguenti giornate:

- martedì 19 novembre aula 1 ore 15.30-17
- martedì 26 novembre aula 2 ore 15.30-17
- martedì 3 dicembre aula 1 ore 15.30-17
- martedì 10 dicembre aula 2 ore 15.30-17

Ampliamento di $\mathbb{R}$

Per $c \in \mathbb{R}$ definiamo le seguenti operazioni:

- $+\infty + c = +\infty\,, \qquad -\infty + c = -\infty$

  Questo significa che qualunque sia la funzione f che per $x \to x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione g che per $x \to x_0$ tende a c, allora $f + g$ per $x \to x_0$ tende a $+\infty$. Analogamente per $-\infty$.

- $+\infty + \infty = +\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty\,, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$
- se inoltre $c \neq 0$,

$$(+\infty)\cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad (-\infty)\cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Forme Indeterminate

Restano indeterminate le operazioni:

$$+\infty-\infty\,,\qquad 0\cdot(\pm\infty)\,,\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,,\qquad \frac{0}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\dfrac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \to x_0$, da questa unica informazione non si può dedurre qual è il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0.

ESEMPIO: consideriamo $f(x) = x\,,\ g(x) = x^3\,,\ h(x) = 2x\,.$

Si ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0.$

Tuttavia, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{f(x)} = 2\,.$

Limite di un Polinomio all'Infinito

Sia $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio di grado $m \geq 1$. Allora:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_m x^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_m > 0\,, \\ -\infty & \text{se } a_m < 0\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_m x^m = \ldots$$ (dipende dal segno di a_m e dalla parità di m)

Il comportamento all'infinito di un polinomio è determinato dal termine di grado massimo.

Esempi: (1) $$\lim_{x \to +\infty} (2x^3 - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right) = +\infty$$

(2) $$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^3 - x^2) = \lim_{x \to -\infty} -x^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Limiti Fondamentali

Dati due polinomi di grado m e n

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0 \\
Q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0
\end{aligned}
$$

si ha che

- $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$

- $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$

Limiti Fondamentali – Esempi

Calcolare i seguenti limiti:

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11} = \frac{4}{7}$$

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2} = 0$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^7} + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^{x}}{2e^{3x} - e^{2x} + 4} = \frac{1}{2}$$

  (si può risolvere ponendo $t = e^x$)