

ESERCIZI 18-11-2002

1. Ho una moneta equilibrata: sulla prima faccia ho scritto 1 e sulla seconda faccia ho scritto 3. La lancio 3 volte e considero la seguente variabile aleatoria:

X = numero scritto sulla faccia uscita il 1° lancio + numero scritto sulla faccia il 2° lancio - numero uscito sulla faccia il 3° lancio.

Calcolare la media della variabile aleatoria X .

2. Un'urna contiene 7 palline bianche e 3 rosse.

a) Si fanno tre estrazioni successive con reimpulamento. Calcolare le seguenti probabilità:

- Che siano tutte bianche
- che siano tutte rosse
- che la prima sia rossa e le altre due bianche
- che siano una rossa e due bianche

b) Risolvere lo stesso problema ma con l'ipotesi che le palline estratte di volta in volta non vengano reimpulstate.

3. In una data popolazione i fumatori abituali sono il 30%. Sapendo che il 5% dei decessi in quella popolazione avviene a causa di tumore al polmone e che fra i deceduti a causa di tumore al polmone i fumatori abituali sono l'80%, calcolare la probabilità per un fumatore abituale di morire per tumore al polmone.

4. Ci sono due dadi: il primo è un dado normale, il secondo è un dado truccato in cui il peso è stato messo in maniera tale che lanciando il dado esce 1 con probabilità $\frac{1}{2}$ e gli altri numeri escono tutti con la stessa probabilità.

Scelgo a caso uno dei due dadi senza poter verificare se la mia scelta è caduta sul dado truccato o sull'altro. Lo lancio due volte e esce entrambe le volte 1. Qual'è la probabilità a posteriori di aver scelto il dado truccato?

5. Una variabile statistica ha una legge normale di media 4 e deviazione standard 2. Calcolare le seguenti frequenze:

- a) $f\{t \text{ t.c. } 3.5 < X(t) < 5\} =$
- b) $f\{t \text{ t.c. } 2 < X(t) < 4\} =$
- c) $f\{t \text{ t.c. } X(t) < 5\} =$
- d) $f\{t \text{ t.c. } X(t) = 4\} =$

6. Calcolare una primitiva $F(x)$ di ciascuna delle seguenti funzioni $f(x) = \cos(5x)$ $g(x) = \frac{1}{1+x}$

$h(x) = e^{3x}$ $j(x) = \frac{1}{x \ln x}$

7. Calcolare l'area della figura piana

$$T = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \mid 2x \leq y \leq x^3 + 3\}$$

8. Dire se i seguenti integrali sono finiti o infiniti e se sono finiti calcolarli:

$$\int_1^{\infty} x \cdot (x^2 + 1)^{-2} dx$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$$

9. Calcolare l'area del seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ t.c. } 0 \leq x < +\infty \quad 0 \leq y \leq x \cdot e^{-x^2}\}$$

10. Un test diagnostico ha una specificità del 95% e una sensibilità del 98%. In una certa popolazione la malattia ha una prevalenza del 10%. Calcolare la probabilità che un individuo con il test positivo sia sano e la probabilità che un individuo con il test negativo sia malato. 11. Una variabile aleatoria ha una legge

normale di media 7 e deviazione standard 4. Calcolare le seguenti probabilità:

$$\text{a) } p(6.5 < X < 7) \quad \text{b) } p(2 < X < 4) \quad \text{c) } p(X < 7) \quad \text{d) } p(X = 1) \quad \text{e) } p(X > 2)$$

12. Calcolare l'area delle figure piane:

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi \quad 0 \leq y \leq \sin(2x)\}$$

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi \quad 0 \leq y \leq |\sin(x)|\}$$

13. Siano $f(x) = x^2$ $g(x) = \sqrt{x}$. Calcolare l'area di ciascuna delle seguenti regioni piane.

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$C = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad g(x) \leq y \leq 1\}$$

14. Sapendo che la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y''(x) = -4y(x)$$

è $Y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$

trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) = -4y(x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$