COGNOME E NOME

Soluzioni Seconda Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica (2-12-2002)

Problema 1 (4 punti: 1 ciascuno ad a,b,c,d)
1)Si fanno due lanci consecutivi di un dado normale. Calcolare le seguenti probabilità:

- a)probabilità che esca due volte 3:$\frac{1}{36}$
- b)probabilità che la seconda volta esca il numero triplo di quello che è uscito la prima:$\frac{2}{36}$
- c)probabilità che l'esito massimo sia 4:$\frac{7}{36}$
- d)probabilità che l'esito minimo sia 4:$\frac{5}{36}$

Problema 2 (4 punti, 2 punti ciascuno) Supponiamo di avere due dadi N e D: N è normale cioè ha scritto sulle facce risp 1,2,3,4,5,6 , P invece ha scritto su due facce il numero 1, su due facce il numero 3 e su due facce il numero 5.

a)Scegliamo a caso uno dei due dadi (con probabilità $\frac{1}{2}$ ciascuno) lo lanciamo due volte senza sapere se è N o P. Entrambe le volte esce un numero dispari. Calcolare la probabilità di aver scelto il dado normale.

- a)probabilità di aver scelto il dado normale:$\frac{1}{5}$

b) Lanciamo ora contemporaneamente i due dadi (quello normale e l'altro) e indichiamo rispettivamente con p e q i punteggi ottenuti. Sia X la variabile aleatoria $X = p + q$. Calcolare la media di X.

- b)media=$\frac{1}{18}(2+3+10+11)+\frac{2}{18}(4+5+8+9)+\frac{3}{18}(6+7)=\frac{117}{18}$

Problema 3 (6 punti, 3 punti ciascuno)

Dire se i seguenti integrali impropri sono finiti o infiniti, giustificando in ciascun caso la risposta:

- $\int_1^\infty x^{-3}dx$: giustificazione:l'integrale improprio si calcola facilmente come $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2}$ e dunque è finito.
- $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^3}dx$ giustificazione:la funzione integranda è positiva e inoltre $\frac{|\sin x|}{x^3}\leq\frac{1}{x^3}$

Problema 4 (5 punti, 2.5 punti ciascuno) Un test diagnostico con specificità del 95% e sensibilità del 97% viene applicato come screening di massa. Sapendo che per dati epidemiologici è noto che la prevalenza della malattia suddetta all'interno della popolazione è del 2%, calcolare:

a) La probabilità di avere la malattia se il test ha dato risultato negativo.

b) la probabilità di non avere la malattia se il test ha dato risultato positivo.

Ricordo le definizioni:

Specificità= probabilità che il test dia esito negativo in un soggetto sano; Sensibilità= probabilità che il test dia esito positivo in un soggetto malato; Prevalenza=

- Risposta 1) $\frac{\frac{3}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{3}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{95}{100}\cdot\frac{98}{100}} = \frac{6}{6+95\cdot 98}$
- Risposta 2) $\frac{\frac{5}{100}\cdot\frac{98}{100}}{\frac{5}{100}\cdot\frac{98}{100}+\frac{97}{100}\cdot\frac{2}{100}} = \frac{5\cdot 98}{5\cdot 98+97\cdot 2}$

Problema 5 (6 punti:2+2+2)
È data l'equazione differenziale:

$*)y'(x) = y(x)(1 - y(x))$

Dire quali tra queste funzioni dipendenti da un parametro sono soluzioni della *):

a) $y(x) = \frac{C\cdot e^x}{1+C\cdot e^x}$

b) $y(x) = C \cdot e^x(1 + C \cdot e^x)$

- Le soluzioni sono:$y(x) = \frac{C\cdot e^x}{1+C\cdot e^x}$

Trovare poi la soluzione $\bar{y}(x)$ dell'equazione $*$ che soddisfa alla condizione $\bar{y}(0) = 2$. Fare uno schizzo del grafico della soluzione.

- $\bar{y}(x) = \frac{-2\cdot e^x}{1-2\cdot e^x}$
- Grafico =

Problema 6 (4 punti: 2 punti ciascuno) Definiamo **concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione**.

1) Dati 5 kg. di soluzione concentrata al 12%, calcolare la quantità di soluto da aggiungere perché la nuova soluzione sia concentrata al 20%

2)Sapendo che aggiungendo a una soluzione 200 grammi di soluto si ottiene una soluzione concentrata al 20% e del peso totale di 2 Kg., calcolare la concentrazione iniziale (in percentuale con una cifra decimale per difetto).

- Risposta 1)500 grammi
- Risposta 2)11.1%

Problema 7 (4 punti)

Una variabile aleatoria X è normale di media -2 e deviazione standard 2. Calcolare le seguenti probabilità:

- a) $p\{t \text{ t.c. } 0 < X(t) < 1\} = 0.0919$
- b) $p\{t \text{ t.c. } -2 < X(t) < 4\} = 0.4987$
- c) $p\{t \text{ t.c. } X(t) < 3\} = 0.9938$
- d) $p\{t \text{ t.c. } X(t) = -1\} = 0$