

COGNOME E NOME

SOLUZIONI Prima Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica 15-11-2002

Problema 1 (6 punti, 2 punti ciascuno)

Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$$

Problema 2 (7 punti: 2 punti ciascuna per le prime due parti e 1 punto per ciascuna delle altre) Sono date le seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

e

$$g(x) = x + 1$$

Scrivere le formula di $f(g(x))$ e quella di $g(f(x))$ Inoltre di $g(f(x))$ trovare il punto x_1 di minimo e il valore m_1 di minimo. Dire inoltre perché la funzione $g(f(x))$ non ha massimo.

•

$$f(g(x)) = \begin{cases} |x + 2| & \text{se } x \leq -1 \\ (x + 1)^2 & \text{se } -1 < x \end{cases}$$

•

$$g(f(x)) = \begin{cases} |x + 1| + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

• $x_1 = -1$

• $m = 1$

- $g(f(x))$ non ha massimo perché per esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Problema 3 (6 punti, 2 punti ciascuno) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nel punto indicato:

(a) $f(x) = 3x^2 + x^{-1}$ $f'(1) = 5$

(b) $f(x) = (x^{2\pi} - 1)(x^2 + 2x - 1)$ $f'(1) = 4\pi$

(c) $f(x) = \frac{x^{-1}}{2x + 1}$ $f'(1) = -\frac{5}{9}$

Problema 4 (4 punti)

Dire perché la funzione $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ è invertibile su tutto \mathbf{R} e calcolare $(f^{-1})'(4)$ (si osservi che $f(1) = 4$)

- f è invertibile perché ha derivata $5x^4 + 3x^2 + 1$ che è sempre positiva
- $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{9}$

Problema 5 (4 punti) Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione

- 1) Sono dati 2 kg. di soluzione (soluzione=soluto + solvente). Sapendo che aggiungendo 600 grammi di solvente la soluzione risulta concentrata al 25%, calcolare la concentrazione iniziale della soluzione.
- 2) È data una soluzione concentrata al 20%. Sapendo che aggiungendo 600 grammi di soluto la soluzione risulta concentrata al 30%, calcolare il peso iniziale della soluzione.
- Risposta 1) 32.5%
- Risposta 2) 4.2 Kg.

Problema 6 (4 punti) In un grafico con scala logaritmica (sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate la scala è logaritmica)

- è rappresentata la retta di equazione $Y = -X + 2$. Trovare il legame funzionale tra x e y dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.
- Scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \sqrt{2x}$
- Risposta 1) $y = \frac{100}{x}$
- Risposta 2) $Y = \frac{1}{2}X + \log_{10}(\sqrt{2})$

Problema 7 (4 punti) Il tempo di dimezzamento dell'isotopo ^{13}N è di dieci minuti. Esprimete con approssimazione per difetto al minuto il tempo necessario affinché una certa quantità di ^{13}N si riduca al 12.5% della quantità iniziale.

- Tempo = 30 minuti